

# **Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastische Stabilität dünnwandiger Schalen**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Marko Alder, M.Sc.  
aus (Geburtsort): Kyritz

eingereicht am: 22.10.2019  
mündliche Prüfung am: 05.06.2020

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Lorenz Tichy  
Prof. Dr.-Ing. Cord-Christian Rossow





# Kurzfassung

In der vorliegenden Dissertation wird die Frage erörtert, wie turbulente Grenzschichten die aeroelastischen Eigenschaften dünnwandiger Schalen in schallnahen Strömungen beeinflussen. Aufbauend auf vorangegangenen Studien, die im Kontext solcher „Panelflatter“-Problemstellungen einen dämpfenden Einfluss der Grenzschicht nachweisen, quantifiziert die vorliegende Arbeit zunächst den Einfluss viskoser Strömungsphänomene auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze ebener Schalen, um anschließend die Systemdynamik in den instabilen Zustandsbereichen zu charakterisieren. Zu diesem Zweck wird ein partitionierter Lösungsansatz zur Kopplung der strukturdynamischen Modellgleichungen und der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) implementiert und ausführlich validiert. Mit besonderem Fokus auf den hinsichtlich der aeroelastischen Stabilität als kritisch bewerteten Mechanismus des Ein-Freiheitsgrad-Flutterns wird über ein vereinfachtes aerodynamisches Ersatzmodell eine phänomenologische Erklärung für den Energietransfer zwischen Strömung und Struktur abgeleitet. Auf Grundlage dieser Erkenntnisse lässt sich der dämpfende Grenzschichteinfluss auf einen ausgeprägten Unterschallcharakter der bewegungsinduzierten Stördruckverteilung im supersonischen Machzahlbereich zurückführen. Mithilfe numerischer Lösungen der RANS-Gleichungen wird nachgewiesen, dass dieser Unterschallcharakter maßgeblich von der lokalen Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht abhängt. Eine Analyse axial umströmter Kreiszyinderschalen zeigt abschließend, dass sich der dämpfende Einfluss turbulenter Grenzschichten auch auf gekrümmte Schalen übertragen lässt. Aus den qualitativen Unterschieden der aeroelastischen Eigenschaften ebener und zylindrischer Schalen werden Forschungsfragen für weiterführende Arbeiten abgeleitet.



# Abstract

This dissertation discusses the question of how turbulent boundary layers affect the aeroelastic properties of thin-walled shells in high subsonic and low supersonic flows. Based on previous studies, which demonstrate a dampening influence of the boundary layer in the context of such “Panel flutter”-problems, the present work quantifies the influence of viscous flow phenomena on the aeroelastic stability boundary of flat shells and subsequently characterizes the dynamic behavior of such systems in the unstable domain. For this purpose a partitioned solution approach for the coupling of the structural model equations and the Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations is implemented and validated in detail. With a focus on single-mode flutter, which is assessed as a critical mechanism with regard to the aeroelastic stability, a phenomenological explanation for the energy transfer between flow and structure is derived by means of a simplified aerodynamic surrogate model. On the basis of these findings, the dampening influence of the boundary layer can be attributed to a pronounced subsonic character of the motion-induced disturbance pressure distribution in supersonic flows. By applying numerical solutions of the RANS equations it is proven that this subsonic character depends significantly on the local velocity distribution in the boundary layer. Finally, an analysis of circular cylindrical shells in axial supersonic flow shows that the damping effect of turbulent boundary layers can also be transferred to curved shells. From the qualitative differences between aeroelastic properties of flat and cylindrical shells, research questions are derived for future studies.



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) in Braunschweig. An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Allen voran möchte ich meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Lorenz Tichy und Herrn Prof. Dr.-Ing. Cord-Christian Rossow für die Betreuung der Arbeit, das über die Jahre entgegengebrachte Vertrauen und die fachlichen Freiräume während meiner Forschungsarbeit danken.

Überdies möchte ich insbesondere Herrn Dr.-Ing. Thino Eggers und Herrn Dr.-Ing. Bernhard Kotzias meinen Dank aussprechen, die das Forschungsprojekt ins Leben gerufen und stets leidenschaftlich unterstützt haben. Ferner bedanke ich mich bei Herrn Peter Nöding und Herrn Dr.-Ing. Martin Konopka für die Unterstützung aus der Industrie.

Ein wesentlicher Anteil der wissenschaftlichen Erkenntnisse geht auf die wertvollen studentischen Arbeiten von Alexander M. Forsting, Lukas Müller und Oliver Luderer zurück. Vielen Dank für Eure tatkräftige Unterstützung.

Mein besonderer Dank gilt zudem den Kolleginnen und Kollegen der Abteilung Raumfahrzeuge. Die ausgiebigen Diskussionen mit Herrn Dr.-Ing. Bodo Reimann zu den Tücken komplexer dynamischer Systeme ebenso wie das gemeinsame Vertiefen von Problemstellungen der Strömungs-Struktur-Interaktion während unserer Strukturkopplungsgruppenarbeitsfortschrittsbesprechungstreffen haben außerordentlich motiviert und wesentlich zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beigetragen.

Zuletzt möchte ich von ganzem Herzen meinen Eltern und Anne Eschermann danken, die mich stets auf meinem Weg zur Promotion unterstützt und alle damit verbundenen Höhen und Tiefen mit mir geteilt haben.

Marko Alder

Hamburg, August 2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Eine kurze Geschichte des Panelflatterns . . . . .	1
1.2 Motivation und Fragestellung . . . . .	3
1.3 Aufbau und Methodik der Arbeit . . . . .	6
<b>2 Theoretische Vorbetrachtungen und Anforderungsanalyse</b>	<b>11</b>
2.1 Approximative Stabilitätsanalyse einer ebenen Schale . . . . .	11
2.2 Arten der aeroelastischen Instabilität . . . . .	14
2.3 Energiebetrachtung oszillierender Systeme . . . . .	15
2.4 Aeroelastische Ähnlichkeitsparameter . . . . .	16
2.5 Modellanforderungen und Lösungsansätze . . . . .	17
<b>3 Modellbildung und Diskretisierungsverfahren</b>	<b>19</b>
3.1 Modellierung der Struktur . . . . .	19
3.1.1 Kontinuumsmechanische Bewegungsgleichungen . . . . .	20
3.1.2 Diskretisierung mittels Finite-Elemente-Methode . . . . .	23
3.1.3 Diskretisierung mittels Galerkin-Verfahren . . . . .	24
3.2 Modellierung der Aerodynamik . . . . .	27
3.2.1 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen . . . . .	27
3.2.2 Diskretisierung mittels Finite-Volumen-Verfahren . . . . .	32
<b>4 Kopplung der Systemgleichungen und Verfahrensvalidierung</b>	<b>35</b>
4.1 Grundlagen partitionierter Lösungsansätze . . . . .	36
4.2 Numerische Implementierung mit TAU-Python . . . . .	37
4.3 Numerische Implementierung mit Fortran . . . . .	39
4.4 Diskretisierung des gekoppelten Systems . . . . .	41
4.4.1 Netztopologie und Randbedingungen . . . . .	41
4.4.2 Analyse der Diskretisierungsfehler . . . . .	42
4.5 Verifizierung und Validierung . . . . .	47
4.5.1 Dynamik der Strukturmodelle . . . . .	48
4.5.2 Reibungsfreie Unterschallströmung . . . . .	49
4.5.3 Reibungsfreie niedrige Überschallströmung . . . . .	52
4.5.4 Reibungsfreie hohe Überschallströmung . . . . .	54
4.5.5 Reibungsbehaftete niedrige Überschallströmung . . . . .	56

<b>5</b>	<b>Analyse der aeroelastischen Stabilität ebener Schalen</b>	<b>59</b>
5.1	Stand der Wissenschaft	59
5.2	Machzahl- und Grenzschichteinfluss auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze	61
5.3	Detailanalyse der Dynamik im instabilen Zustandsbereich	65
5.3.1	Identifikation der Stabilitätsbereiche	66
5.3.2	Bifurkationsanalysen	67
5.3.3	Analyse der Attraktordimensionalität und Ljapunow-Exponenten	72
5.3.4	Einfluss turbulenter Grenzschichten	73
5.4	Zusammenfassung in Bezug auf die Zielstellung	82
<b>6</b>	<b>Analyse des aerodynamischen Antwortproblems</b>	<b>85</b>
6.1	Stand der Wissenschaft	86
6.2	Analytische Untersuchung des Grenzschichteinflusses	87
6.2.1	Modellbildung	87
6.2.2	Methodik zur Analyse der generalisierten Luftkräfte	92
6.2.3	Wandstördrücke in grenzschichtfreien Systemen	95
6.2.4	Wandstördrücke in grenzschichtbehafteten Systemen	99
6.2.5	Detailuntersuchung der Grenzschichtmechanismen	101
6.2.6	Einflussanalyse der freien Grenzschichtparameter	108
6.2.7	Generalisierte Luftkräfte in grenzschichtbehafteten Systemen	112
6.3	Bewertung der analytischen Ergebnisse mittels CFD	115
6.3.1	Anpassung der Rechenetze und numerischen Randbedingungen	115
6.3.2	Vergleich der analytischen und numerischen Ergebnisse	116
6.4	Einfluss aerodynamischer Nichtlinearitäten und geometrischer Randbedingungen	123
6.4.1	Gültigkeitsbereich der dynamischen Linearität	124
6.4.2	Variation der Anregungsform	127
6.5	Zusammenfassung in Bezug auf die Zielstellung	133
<b>7</b>	<b>Analyse der aeroelastischen Stabilität zylindrischer Schalen</b>	<b>135</b>
7.1	Stand der Wissenschaft	136
7.2	Analyse der aerodynamischen Dämpfung im stabilen Zustandsbereich	138
7.3	Detailanalyse der Systemdynamik im instabilen Zustandsbereich	141
7.3.1	Dynamik reibungsfreier Systeme	141
7.3.2	Einfluss turbulenter Grenzschichten	144
7.4	Zusammenfassung in Bezug auf die Zielstellung	145
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>147</b>
8.1	Zusammenfassung	147
8.2	Ausblick	150
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Koeffizienten der Modellgleichungen</b>	<b>161</b>
A.1	Koeffizienten der strukturdynamischen Modellgleichungen	161
A.2	Koeffizienten der aerodynamischen Modellgleichungen	162
<b>B</b>	<b>Schließungsansätze der Reynolds-Gleichungen</b>	<b>163</b>
<b>C</b>	<b>Gegenüberstellung der Grenzschichtparameter</b>	<b>167</b>



**D Dynamisches Linearitätsverhalten ebener Schalen****171**



# Nomenklatur

Auf die folgenden Abkürzungen, Symbole und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit wiederholt zurückgegriffen. Zudem gelten für die gesamte Abhandlung die unten aufgeführten Vereinbarungen.

## Vereinbarungen

- Nach Möglichkeit werden für englische Begriffe deutsche Übersetzungen verwendet. Hat sich in der Literatur ein englischer Fachbegriff etabliert, für den ein deutsches Pendant nicht sinnvoll erscheint, wird dieser in *Kursivschrift* aufgeführt.
- In der Literatur wird im Zusammenhang mit Panelflutterstudien häufig der Begriff „Platte“ verwendet. Hierbei handelt es sich in der Strukturmechanik um den Spezialfall einer ebenen Schale, die ausschließlich senkrecht zu ihrer Ebene belastet ist [1]. Da in der vorliegenden Arbeit jedoch auch Belastungen in ihrer Ebene berücksichtigt werden (als „Scheibe“ bezeichnet), sei einheitlich der Oberbegriff „Schale“ verwendet. Davon ausgenommen sind die etablierten Bezeichnungen „von-Kármán’sche Plattengleichung“ und „Mindlin’sche Plattentheorie“.

## Abkürzungen

ALE	<i>Arbitrary-Lagrangean-Eulerian</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
FEM	Finite Elemente Methode
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FVV	Finite Volumen Verfahren
Fortran	<i>FORmula TRANslation</i>
GCI	<i>Grid Convergence Index</i>
GCL	<i>Geometric Conservation Law</i>
GZS	Grenzzyklusschwingung
LPGL	Linearisierte Potentialgleichung
LSODE	<i>Livermore Solver for Ordinary Differential Equations</i>
Nastran	<i>NASA Structural Analysis System</i>
RANS	<i>Reynolds-averaged Navier-Stokes</i>
RB	Randbedingung

RBF	Radiale Basisfunktion
SA	Spalart-Allmaras
Taifun	<i>Temporal Adapting Integrator for Flutter Understading</i>
Tau	<i>Triangular Adaptive Upwind</i>
TAU-Python	Python-Interface für das DLR-Tau-Verfahren
TWG	Transsonischer Windkanal Göttingen

## Symbole und Schreibweisen

$a$	Skalar
$\mathbf{a}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Matrix oder Tensor
$\hat{(\cdot)}$	lokale zeitvariante Amplitude
$\overline{(\cdot)}$	komplexe Amplitude ( $z = \bar{z} e^{i\omega t}$ )
$\overline{\overline{(\cdot)}}$	normierte komplexe Amplitude ( $\overline{\overline{z}}_1 = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$ )
$\tilde{(\cdot)}$	komplexe Amplitude ( $z = \tilde{z} e^{i\omega t + \alpha_\nu x}$ )
$(\cdot)^*$	konjugiert komplexe Größe
$\dot{(\cdot)}$	Ableitung einer Größe nach der Zeit
$(\cdot)'$	Störgröße
$\delta(\cdot)$	virtuelle Größe
$ \cdot $	Absolutbetrag einer skalaren Größe
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm einer vektoriellen Größe
$\nabla$	Gradientenoperator
$\nabla \cdot$	Divergenzoperator
$\Re(\cdot)$	Realteil einer komplexen Zahl
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\rightarrow (\cdot)^+$	Konvergenz aus positiver Richtung
$\rightarrow (\cdot)^-$	Konvergenz aus negativer Richtung

## Hochgestellte Indizes

f	Größe bezogen auf das Strömungsfeld (Fluid)
kor	Größe eines Korrektorschrittes
pre	Größe eines Prediktorschrittes
s	Größe bezogen auf das Strukturfeld

*Tiefgestellte Indizes*

$e$	Größe bezogen auf ein finites Element
$i, j$	allgemeine Zählvariablen
$n$	Zählvariable zur Indizierung einer Fluidschicht
$r, s$	Zählvariablen der generalisierten Freiheitsgrade
$r$	Größe bezogen auf die Referenzkonfiguration
$R$	Größe bezogen auf die Momentankonfiguration
$x, y, z$	Größe bezogen auf kartesische Koordinaten
$\nu$	Größe bezogen auf einen wandernden Wellenanteil
$\theta$	Größe bezogen auf die Winkelkoordinate in Zylinderkoordinaten
$\infty$	Anströmgröße

**Bezeichnungen***Großbuchstaben*

$A_{n,\nu}, B_{n,\nu}$	Koeffizienten der Bewegungsgleichung einer Fluidschicht $n$
$A$	Fläche einer Schale
$B$	Breite einer rechtwinkligen Schale
$D$	Plattensteifigkeit nach Gl. (3.10)
$E$	Elastizitätsmodul
<b>E</b>	Green-Lagrange-Verzerrungstensor
$G_{n,\nu}, H_{n,\nu}$	Koeffizienten der Bewegungsgleichung einer Fluidschicht $n$
<b>I</b>	Zweistufiger Einheitstensor, bzw. Einheitsmatrix
$J_i$	Bessel-Funktion $i$ -ter Ordnung
$L$	Länge einer Schale
$M$	Machzahl
$M_s$	generalisierte Masse
$Q$	generalisierte Luftkraft
<b>Q</b>	generalisierte Luftkraftmatrix
$R_x, R_y$	normierte Membranlasten in $x$ - und $y$ -Richtung nach Gl. (2.23)
$R_{n,\nu}$	komplexes Amplitudenverhältnis nach Gl. (6.45)
$Re$	Reynoldszahl
<b>S</b>	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$T$	Periodendauer einer Schwingung; Temperatur
$U$	Strömungsgeschwindigkeit in $x$ -Richtung
$V$	Phasengeschwindigkeit einer wandernden Welle
$W_{\text{cyc}}$	Arbeit über einen Schwingungszyklus

*Kleinbuchstaben*

$a$	Schallgeschwindigkeit
$\mathbf{b}$	interne Körperkräfte eines strukturdynamischen Systems
$c_p$	Druckbeiwert
$\mathbf{d}_{ij}$	Abstandsvektor zwischen den Punkten $i$ und $j$
$f$	Frequenz
$\mathbf{f}$	Luftkraftvektor
$h$	Schalendicke
$i$	imaginäre Einheit
$k$	reduzierte Frequenz nach Gl. (2.22)
$l_{\text{ref}}$	Referenzlänge der Reynoldszahl
$l_x$	Länge der Haftrandbedingung vor der elastischen Struktur
$m$	Masse pro Einheitsfläche
$p$	statischer Druck
$q$	dynamischer Druck / Staudruck: $q = \frac{1}{2}\rho U^2$
$q_s$	generalisierte (modale) Koordinate
$\mathbf{q}$	generalisierter (modaler) Verschiebungsvektor
$t$	Zeitkoordinate
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor in kartesischen Koordinaten
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor in kartesischen Koordinaten
$w$	Verschiebung in $z$ -Richtung
$\mathbf{x}$	Ortsvektor in kartesischen Koordinaten
$x, y, z$	kartesische Koordinaten

*Griechische Buchstaben*

$\alpha$	Wellenzahlkomponente in $x$ -Richtung
$\beta$	Abklingkonstante einer gedämpften Schwingung
$\gamma$	Wellenzahlkomponente in $y$ -Richtung
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\epsilon$	Abweichung, Fehler
$\zeta$	normierte $z$ -Koordinate: $\zeta = z/L$
$\eta$	normierte $y$ -Koordinate: $\eta = y/B$
$\theta$	Mach'scher Winkel nach Gl. (6.41)
$\kappa$	Verhältnis aus Grenzschichtdicke zu Wellenzahl nach Gl. (6.22)
$\lambda$	dimensionsloser dynamischer Druck nach Gl. (2.20)
$\mu$	Massenverhältnis zwischen Fluid und Struktur nach Gl. (2.21)

$\nu$	Zählvariable der Wellenzahl; Poissonzahl
$\xi$	normierte $x$ -Koordinate: $\xi = x/L$
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Grenzschichtparameter nach Gl. (6.46)
$\tau$	dimensionslose Zeitkoordinate
$\phi$	Geschwindigkeitspotential
$\varphi$	Phase, Argument einer komplexen Zahl
$\chi$	komplexes Amplitudenverhältnis nach Gl. (6.49)
$\psi$	Eigenschwingungsform
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_s$	Eigenkreisfrequenz
$\Gamma, \partial\Omega$	Oberfläche / Berandung eines physikalisch homogenen Feldes $\Omega$
$\Gamma_k$	Kopplungsrand
$\Gamma_{n,\nu}$	komplexer Reflexionsfaktor einer Fluidschicht $n$ nach Gl. (6.51)
$\Lambda$	Logarithmisches Dekrement nach Gl. (7.1)
$\Xi$	Normierte Arbeit über einen Schwingungszyklus nach Gl. (6.66)
$\Omega$	physikalisch homogenes Feld



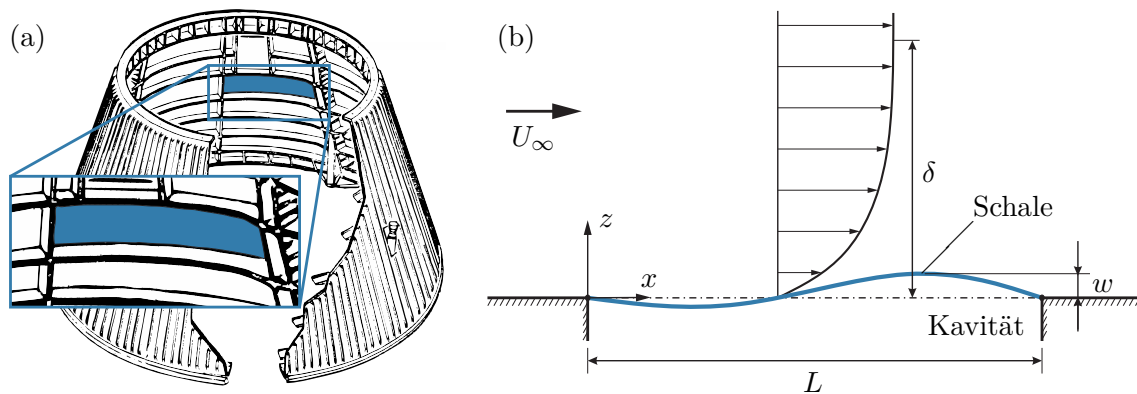


# 1 Einleitung

## 1.1 Eine kurze Geschichte des Panelflatterns

Mit der frühen Entwicklung von Hochleistungs-Jets und Raketen, deren Fluggeschwindigkeiten die Schallgeschwindigkeit erreichten und überschritten, gingen viele Fehlschläge einher, die auf eine bis dato kaum untersuchte Problemstellung aus dem Bereich der Fluid-Struktur-Interaktion zurückzuführen sind. Die Forderung nach einem möglichst geringen Gewicht in Kombination mit einer hohen Struktursteifigkeit führte zum Einsatz sogenannter Monocoque-Konzepte, bestehend aus dünnwandigen Schalelementen, die teils unter Verwendung verstärkender Strukturen wie Holme und Spanten zum Lasttransfer beitragen und als äußere Beplankung dienen. Abbildung 1.1(a) illustriert dieses Konzept exemplarisch an einer S-IVB-Stufenverkleidung der Trägerrakete Saturn V. Durch die Interaktion eines solchen strukturdynamischen Systems mit instationären aerodynamischen Kräften kann der Strömung Energie entzogen und somit ein selbsterregter Schwingungszustand des Systems angefacht werden. Dieses dynamische Phänomen gewinnt bei allseitig eingespannten Schalelementen nach dem Überschreiten der Schallgeschwindigkeit an Relevanz und wird als Beplankungsflattern oder, abgeleitet aus dem Englischen *panel flutter*, als Panelflattern bezeichnet. Während des zweiten Weltkriegs ließen sich etwa 70 Fehlschläge bei Flügen der A4-Rakete auf ein Strukturversagen durch Panelflattern zurückführen [2]. In den 1950er-Jahren verlor das US-Militär mehrere Jets durch Beschädigungen von Kabelsträngen, die an oszillierenden Hautfeldern befestigt waren [2]. In den 1960er-Jahren gewann das Panelflatter-Problem insbesondere durch die Entwicklung von Trägerraketen wie der Atlas-Centaur [3] oder der Saturn V [4] weiter an Bedeutung. Strukturelle Schäden an den experimentellen Luftfahrzeugen X-15 und X-20 [5, 6] sowie weitere Vorkommnisse, die von Garrick [2] und Dowell [6] zusammengefasst sind, führten letztendlich dazu, dass das Panelflatter-Problem durch umfassende analytische, numerische und experimentelle Studien wissenschaftlich untersucht wurde und zu einem umfassenden Fundus an Literatur führte.

Ein Großteil dieser Studien, die der Fachdisziplin Aeroelastik zugeordnet werden können, befasst sich mit dem Einfluss strukturdynamischer und aerodynamischer Systemparameter auf die aeroelastische Stabilität ebener und zylindrischer Schalen. Dazu werden die realen Konfigurationen im Regelfall auf stark vereinfachte generische Problemstellungen, wie in Abbildung 1.1(b) dargestellt, überführt. Hierbei ist die Schalenoberseite einer wandparallelen Strömung ausgesetzt, während sich auf der gegenüberliegenden Seite eine Kavität mit einem ruhenden Fluid befindet. Zudem ist die Schale über eine gelenkige oder fest eingespannte Lagerung allseitig mit einer steifen Rahmenstruktur verbunden. Wird bei einer supersonischen Machzahl nun ein kritischer dynamischer Druck überschritten, kann eine beliebig kleine Störung eine angefachte Schwingung initiieren. Im Gegensatz zum klassischen Flattern, zum Beispiel dem Biege-Torsionsflattern von Flügeln, steigt jedoch die Amplitude der Schwingung nicht exponentiell an, sondern wird signifikant durch eine



**Abbildung 1.1:** Realistische (links, nach [8]) und vereinfachte (rechts) Panelflatter-Konfigurationen.

Biege-Dehn-Kopplung und einer daraus resultierenden nichtlinearen Zunahme der Struktursteifigkeit limitiert [7]. Eine solche Grenzzykusschwingung weist bei einer allseitigen Einspannung Amplituden in der Größenordnung der Schalendicke auf [7] und führt im Regelfall nicht zu einem direkten Strukturversagen, sondern zu Problemen bezüglich der Materialermüdung oder indirekt zur Beschädigung von rückseitig montierten Systemkomponenten, wie zum Beispiel Kabelsträngen oder Leitungen.

Ein wesentliches Resultat dieser Studien war, dass der kritische dynamische Druck, bei dem ebene Schalen aeroelastisch instabil werden (im Folgenden als Stabilitätsgrenze bezeichnet), im schallnahen Geschwindigkeitsbereich signifikant abnimmt [9, 10]. Insbesondere durch experimentelle Studien von Muhlstein et al. [9] konnte jedoch zeitgleich nachgewiesen werden, dass bei geringen supersonischen Machzahlen solch ein kritisches Verhalten durch die an der Schalenoberseite anliegende Strömungsgrenzschicht deutlich gemildert wird. Es zeigte sich zudem, dass eine moderate Grenzschichtdicke in der Größenordnung von wenigen Prozent der überströmten Strukturgröße die Stabilitätsgrenze prozentual um ein bis zwei Größenordnungen erhöhen kann [11]. Ließen sich die geometrischen Nichtlinearitäten isotroper Werkstoffe durch die Verwendung der von-Kármán'schen Plattentheorie in den theoretischen Untersuchungen hinreichend berücksichtigen, so stellten aerodynamische Nichtlinearitäten eine große Herausforderung damaliger Studien dar, die hauptsächlich auf potentialtheoretischen Strömungsmodellen basierten. Viskose Strömungsgrenzschichten konnten lediglich über die explizite Vorgabe eines gemittelten Geschwindigkeitsprofils in der eigentlich als reibungs- und rotationsfrei modellierten Strömung approximiert werden [10, 12, 13]. Die quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment wurde durch diesen Ansatz dennoch erheblich verbessert. In diesem Kontext folgten größtenteils empirisch geprägte Studien über den Einfluss von Grenzschichtströmungen auf die aeroelastische Stabilität generischer Panelflatter-Konfigurationen [13].

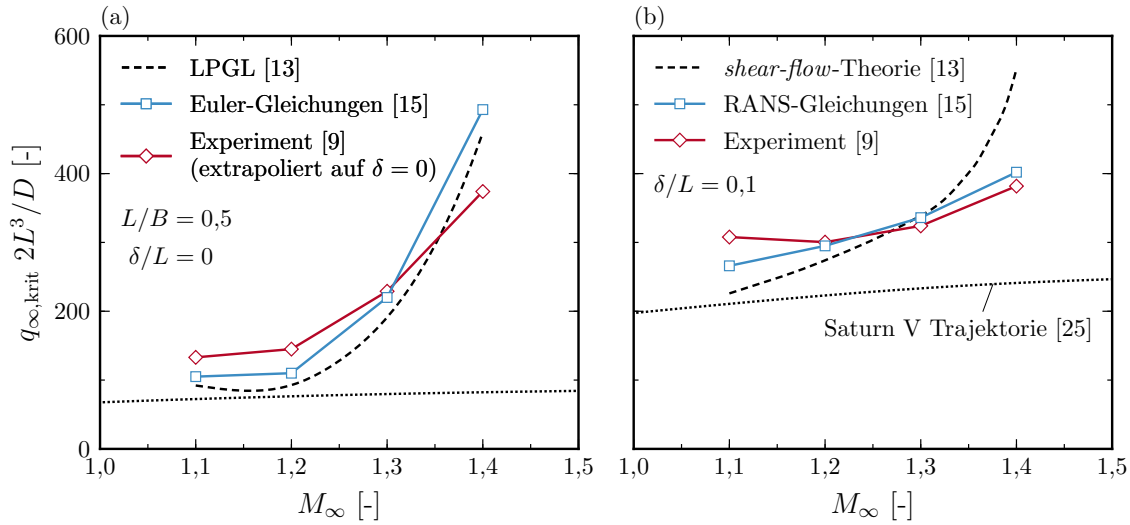
Nachdem eine Vielzahl experimenteller und theoretischer Studien zur sicheren Auslegung von Trägerraketen und Überschall-Flugzeugen beigetragen hatte, sank das Interesse an Panelflattern als Forschungsgegenstand in den 1980er-Jahren, ohne dass die zugrundeliegenden aeroelastischen Phänomene zufriedenstellend erklärt werden konnten. Einhergehend mit der Entwicklung moderner Rechnersysteme wurden seit dieser Zeit jedoch die numerischen Algorithmen für die Lösung der aerodynamischen und strukturdynamischen Systemgleichungen immer leistungsfähiger, was wiederum zur Entwicklung partitionierter Lösungsansätze für die Kopplung der Teilsysteme Fluid und Struktur motivierte [14]. Besonders die Berechnung aerodynamischer Kräfte mittels der numerischen Strömungs-

mechanik (engl.: *computational fluid dynamics*, CFD) ließ Panelflattern in jüngerer Zeit wieder als Forschungsschwerpunkt in den Fokus rücken, da hierdurch die Berücksichtigung aerodynamischer Nichtlinearitäten erleichtert wurde. So weisen Hashimoto et al. [15] im Jahr 2009 für schallnahe Strömungen nach, dass die Modellierung turbulenter Grenzschichten mithilfe der CFD im Vergleich zu den potentialtheoretischen Modellierungsansätzen zu einer besseren Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von Muhlstein et al. [9] führt.

An diesem Punkt setzt die vorliegende Forschungsarbeit an. Sie macht sich sowohl ausgewählte Modelle und Lösungsmethoden aus den Anfängen der Panelflatterforschung als auch moderne Teildisziplinen wie die CFD zu nutze, um zu einem umfassenderen phänomenologischen Verständnis der aeroelastischen Eigenschaften flexibler Schalen unter Berücksichtigung viskoser Effekte in schallnahen Strömungen beizutragen. Dass sie dabei bei Weitem nicht das letzte Kapitel in einer nicht allzu kurzen Geschichte des Panelflatterns darstellen wird, verdeutlichen bereits über 80 Studien, die allein während des Entstehungsprozesses der vorliegenden Arbeit veröffentlicht wurden und das erneute Interesse an verschiedenen Teilaspekten dieses Forschungsthemas unterstreichen. Dazu zählen etwa Entwicklungen von Modellen reduzierter Ordnung (ROMs) [16], die Integration neuer Erkenntnisse und Lösungsverfahren aus dem Bereich der Faserverbundwerkstoffforschung [17], Studien über Stoß-Grenzschicht-Interaktionen bei hohen Machzahlen [18] oder auch gezielte Untersuchungen zum Einfluss von Strömungsgrenzschichten auf die aeroelastische Stabilität in schallnahen Strömungen [19, 20].

## 1.2 Motivation und Fragestellung

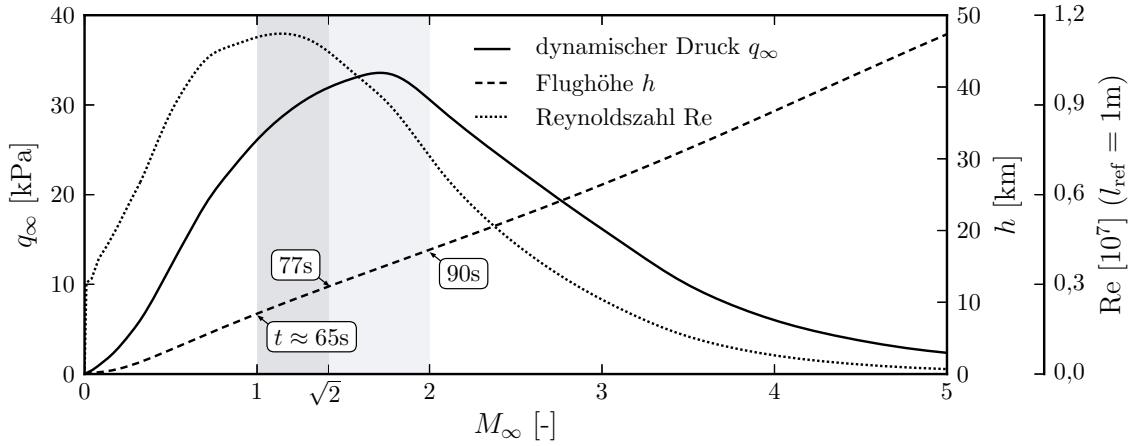
Der im vorangegangenen Abschnitt erwähnte Einfluss einer Strömungsgrenzschicht soll im Folgenden detaillierter erläutert werden. Überströmt ein reibungsbehaftetes (viskoses) Fluid eine reale Struktur, bildet sich im wandnahen Bereich aufgrund der Oberflächenrauigkeit und den daraus resultierenden Schubspannungen im Fluid eine Scherschicht aus, die durch eine Reduktion der mittleren Strömungsgeschwindigkeit auf Null (Haftbedingung an der Wand) charakterisiert ist und als Grenzschicht (auch Wandgrenzschicht oder Strömungsgrenzschicht) bezeichnet wird. In vielen Anwendungsbereichen der Aeroelastik, etwa bei Stabilitätsbetrachtungen ziviler Verkehrsflugzeuge unter Reiseflugbedingungen, die durch eine geringe Grenzschichtdicke  $\delta$  im Vergleich zur mittleren Flügeltiefe charakterisiert sind und deren Anströmgeschwindigkeit nicht in den Bereich des sogenannten *transonic dip* [21] fällt, ist der Grenzschichteinfluss auf die aeroelastischen Stabilitätseigenschaften vernachlässigbar klein [22]. Im Fall des Panelflatterns liegen die relevanten Strömungsgeschwindigkeiten, bei denen dynamische Instabilitäten auftreten können, jedoch im niedrigen supersonischen Machzahlbereich [7], weshalb eine rein potentialtheoretische Modellierung des Strömungsfeldes zu signifikanten Fehlern führt. Zudem ist die überströmte Strukturlänge  $L$  (und damit die Wellenlänge etwaiger Störungen) in der Größenordnung der Grenzschichtdicke  $\delta$  (vgl. Abbildung 1.1(b)), wodurch der Grenzschichteinfluss auf die bewegungsinduzierte Druck- und Geschwindigkeitsverteilung trotz hoher Reynoldszahlen nicht mehr vernachlässigt werden kann. Eine experimentelle Bestätigung hierfür liefern unter anderem Muhlstein und Gaspers [9], indem sie in Windkanalversuchen die Grenzschichtdicke variieren ( $Re \approx 2 \cdot 10^7$  mit  $l_{\text{ref}} = 1$  m) und die Ergebnisse auf den in der Praxis nicht realisierbaren Fall einer reibungsfreien Strömung extrapolieren. Abbildung 1.2 zeigt, dass verschiedene theoretische Ansätze, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit detailliert diskutiert werden, die experimentellen Daten bestätigen.



**Abbildung 1.2:** Stabilitätsgrenzen einer ebenen Schale ohne (links) und mit (rechts) Grenzschicht.

Basierend auf instationären Lösungen der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (abgeleitet von der englischen Bezeichnung *Reynolds-averaged Navier-Stokes equations* im Folgenden als RANS-Gleichungen betitelt) im Zeitbereich mithilfe eines Turbulenzmodells nach Spalart und Allmaras [23] gelingt es Hashimoto et al. [15], die in Abbildung 1.2(b) gezeigten experimentellen Ergebnisse von Muhlstein und Gaspers [9] zu reproduzieren. Im Gegensatz zur *shear-flow*-Theorie von Dowell [13], die auf einer potentialtheorietischen Modellierung der Strömung mit einer expliziten Vorgabe der Geschwindigkeitsverteilung im Grenzschichtbereich basiert, wird somit direkt den viskosen Eigenschaften des Fluids Rechnung getragen. Da diese Studien primär den Einfluss reibungsbehafteter Strömungen auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze in den Fokus rücken, lassen sich aus ihnen vielseitige Fragestellungen ableiten, die zum einen der anwendungsorientierten Relevanz dieses Themas und zum anderen der wissenschaftlichen Analyse grundlegender phänomenologischer Zusammenhänge zugeordnet werden können. Beide Aspekte seien im Folgenden näher erläutert.

In Bezug auf anwendungsorientierte Problemstellungen motiviert insbesondere ein steigender Konkurrenzdruck im kommerziellen Raumtransport dazu, ein besseres Verständnis über den Einfluss von Strömungsgrenzschichten auf den aerodynamischen Beitrag zur Gesamtsystemdämpfung zu erlangen. Eine genauere Vorhersage der aeroelastischen Stabilität von Raumfahrtstrukturen ermöglicht ein besseres Abschätzen von Sicherheitsfaktoren oder eine gewichtsoptimierte Strukturdimensionierung. Ein Beispiel aus der industriellen Anwendung, das der vorliegenden Arbeit vorausging und letztendlich mit zur Motivation dieses Forschungsprojektes beigetragen hat, ist die Entwicklung eines zylindrischen Thermalschutzsystems für die Oberstufe des europäischen Trägersystems Ariane V. Die dem Entwurfsprozess zugrundeliegenden numerischen und experimentellen Studien sind von Carrera et al. [24] zusammengefasst. Obwohl die Autoren gekrümmte Schalen in Form von  $60^\circ$  und  $180^\circ$ -Zylindersegmenten betrachten, unterscheiden sich die aeroelastischen Stabilitätsgrenzen aus qualitativer Sicht nur unwesentlich von jenen ebener Schalen. Zudem ist das Missionsprofil heutiger Trägerraketen vergleichbar mit entsprechenden Systemen aus den 1960er-Jahren [24, 25]. Aufgrund der eingeschränkten Verfügbarkeit aktueller Missionsprofile sei auf die Messdaten des Starts einer Saturn V [25] zurückgegriffen, um



**Abbildung 1.3:** Trajektorie einer Saturn V (nach [25]).

einen repräsentativen Eindruck der aerodynamischen Randgrößen zu gewinnen. Abbildung 1.3 verdeutlicht in diesem Zusammenhang, dass der dynamische Druck  $q_\infty$  bei niedrigen supersonischen Machzahlen  $M_\infty$  sein Maximum annimmt. Dieser Umstand ist aus aeroelastischer Sicht ungünstig, da insbesondere im Machzahlbereich  $1 < M_\infty < \sqrt{2}$  (dunkle Schattierung in Abbildung 1.3) die aeroelastische Stabilität ebener Schalen signifikant abnimmt [7] (vgl. Abbildung 1.2) und quasistationäre Strömungsmodelle ihre Gültigkeit verlieren. Hinzu kommt, dass im niedrigen Überschall ebenso die Reynoldszahl  $Re$  ihren Maximalwert erreicht und somit die Grenzschichtdicke im Vergleich zu den angrenzenden Machzahlbereichen klein ist. Die Saturn V benötigte für die Beschleunigung von Mach 1 auf  $\sqrt{2}$  etwa 12 Sekunden, wobei im Bereich der aeroelastisch relevanten Strukturelemente aufgrund der hohen Reynoldszahl von einer rein turbulenten Grenzschicht ausgegangen werden kann. Ein Großteil der publizierten Studien betrachtet supersonische Machzahlen erst ab  $M_\infty \geq 2$ , da hier der Unterschied zwischen quasistationären und instationären Strömungsmodellen vernachlässigbar ist und mit Erstgenannten aufgrund ihrer numerischen Effizienz größere Parameterräume analysiert werden können. Im Bereich  $1 \leq M_\infty \leq 2$  wurden Panelflatter-Problemstellungen bisher wenig betrachtet (graue Schattierung in Abbildung 1.3), wenngleich insbesondere hier die aeroelastischen Phänomene sehr komplex sein können und daher maßgeblich den aeroelastischen Entwurf beeinflussen. So stellt sich unter anderem die Frage, ob beim Flug in niedrigen supersonischen Geschwindigkeitsbereichen (die Saturn V benötigte etwa 25 Sekunden für die Beschleunigung von Mach 1 auf 2) Panelflattern als nicht-destruktive Grenzzyklusschwingung unbedingt zu vermeiden ist oder in Maßen toleriert werden kann. Wichtig ist zudem die Frage, welche Modellannahmen und Lösungsmethoden heranzuziehen sind, um ein angemessenes Verhältnis aus numerischem Aufwand und notwendigem Detailgrad zu wahren. In Hinblick auf die Entwicklung und Anwendung aerodynamischer Ersatzmodelle ist eine detaillierte Kenntnis der aeroelastischen Systemeigenschaften erforderlich. So ist etwa zu prüfen, ob ein dynamisch linearer Zusammenhang zwischen der Strukturdeformation und der daraus resultierenden Druckantwort existiert, wenn sich im schallnahen Geschwindigkeitsbereich Verdichtungs- und Expansionseffekte periodisch abwechselnd dem ungestörten und überwiegend gradientenfreien Strömungszustand überlagern. Zur Beantwortung solcher Fragestellungen ist es notwendig, die dynamischen Eigenschaften entsprechender Systeme sowohl im Bereich der aeroelastischen Stabilitätsgrenze als auch in den instabilen Zustandsbereichen unter Berücksichtigung des Grenzschichteinflusses zu charakterisieren.

Im Kontext einer wissenschaftlichen Analyse der zugrundeliegenden phänomenologischen Mechanismen sind in der Fachliteratur nur wenige Publikationen zu finden. So ist zum Beispiel unklar, nach welchem Mechanismus das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht (im Folgenden als Grenzschichtprofil bezeichnet) die bewegungsinduzierte Oberflächendruckverteilung beeinflusst. Vielmehr standen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zur sicheren Dimensionierung von Luft- und Raumfahrtstrukturen empirisch geprägte Untersuchungen des aeroelastischen Stabilitätsproblems im Fokus. Letztere erforderten aufgrund der, nach heutigen Maßstäben, geringen Rechenleistung vereinfachte Modellannahmen in verschiedensten mathematischen Komplexitätsgraden. Dieser Umstand bietet heute jedoch die Möglichkeit, einzelne physikalische Mechanismen isoliert voneinander zu betrachten. So zeigt ein Vergleich der *shear-flow*-Theorie mit experimentellen Daten in Abbildung 1.2, dass sich in Bezug auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze allein durch die Berücksichtigung des Grenzschichtprofils eine signifikante Verbesserung des potentialtheoretischen Modellansatzes erreichen lässt. Dies motiviert aus phänomenologischer Sicht dazu, die Ausbreitungscharakteristik bewegungsinduzierter Störungen in lokal variierenden Geschwindigkeitsbereichen unter Ausnutzung der unterschiedlichen Komplexitätsgrade verschiedener Modellansätze zu untersuchen. So lassen sich durch einen Vergleich der stark vereinfachten Modellgleichungen mit modernen Entwicklungen auf dem Gebiet der numerischen Strömungsmechanik einzelne Eigenschaften, zum Beispiel die Viskosität des Fluids, gezielt isolieren und hinsichtlich ihres Einflusses auf die aeroelastischen Eigenschaften des gekoppelten Systems bewerten.

Auf den oben diskutierten Vorüberlegungen basiert die dieser Arbeit zugrundeliegende **Forschungsfrage**:

Wie beeinflusst eine turbulente Grenzschicht die aeroelastische Stabilität dünnwandiger Schalen in einer schallnahen Strömung?

### 1.3 Aufbau und Methodik der Arbeit

In der oben gestellten Forschungsfrage bezieht sich der Begriff „wie“ sowohl auf eine allgemeine Charakterisierung des dynamischen Systems unter dem Einfluss turbulenter Grenzschichten, als auch auf die gezielte Suche nach den dabei wirkenden physikalischen Mechanismen. Um strukturiert eine Antwort auf die gestellte Forschungsfrage zu erarbeiten, werden einzelne Betrachtungsebenen eingeführt, die sukzessive aufeinander aufbauen. Jeder Betrachtungsebene ist eine Leithypothese zugeordnet, welche die Motivation zu dem betrachteten Teilgebiet widerspiegelt. Abbildung 1.4 fasst die wesentliche Struktur der vorliegenden Arbeit entsprechend zusammen und gibt einen Überblick, welche Methoden, Modelle und Algorithmen den einzelnen Arbeitsschritten zugrunde liegen.

Zunächst werden jedoch die dazu notwendigen theoretischen Grundlagen beleuchtet. In diesem Zusammenhang versteht sich Kapitel 2, welches die Wahl der Modelle und Lösungsmethoden begründet, als Bindeglied zwischen der allgemeinen Einführung in Kapitel 1 und der detaillierten Modellbeschreibung in Kapitel 3. Hierzu werden in Kapitel 2 auf analytischer Basis die aeroelastischen Eigenschaften einer typischen Panelflatter-Konfiguration identifiziert und daraus Herausforderungen für die folgenden Betrachtungen, insbesondere in Hinblick auf die Modellierung der instationären Luftkräfte, abgeleitet. Um einen Eindruck von den Größenordnungen der maßgebenden aerodynamischen und strukturdynamischen Parameter zu gewinnen und die praktische Relevanz des Themas zu untermauern,



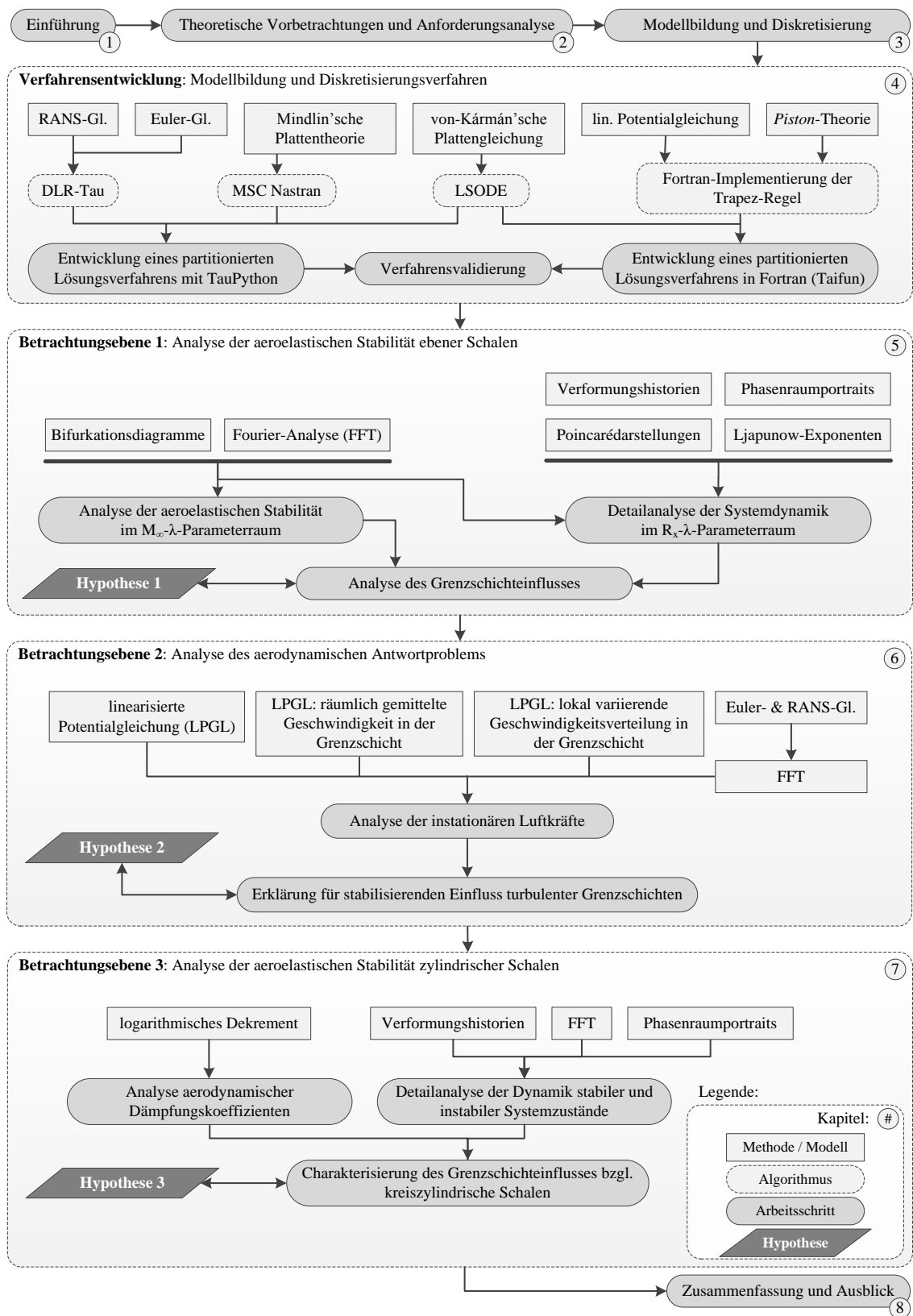


Abbildung 1.4: Aufbau und Methodik der Arbeit.

werden an dieser Stelle letztmalig dimensionsbehaftete Größen verwendet. Eine allgemeingültige Beschreibung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten erfordert indessen die Verwendung dimensionsloser Größen, die folglich ebenfalls in Kapitel 2 eingeführt werden.

Aufgrund der hohen Anzahl an Literaturquellen werden diese nicht in einem gesonderten Kapitel zusammengefasst, sondern den jeweiligen Betrachtungsebenen zugeordnet und diskutiert (auf eine explizite Erwähnung in Abbildung 1.4 sei daher verzichtet). Auf diese Weise lässt sich der aktuelle Stand der Forschung unter Berücksichtigung der Erkenntnisse vorangegangener Betrachtungsebenen erörtern und die Relevanz angrenzender Forschungsgebiete ohne direkten Bezug zum Panelflattern bewerten, etwa zu Strömungen über wellige Wände oder zur Ausbreitung akustischer Wellen in Grenzschichten.

Kapitel 4 beschreibt die in dieser Arbeit verwendeten Ansätze zur numerischen Lösung der gekoppelten Systemgleichungen. Im Rahmen eines partitionierten Lösungsansatzes wird zum einen das am DLR entwickelte Tau-Verfahren mit verschiedenen Strukturlösern gekoppelt. Hierdurch lässt sich der Grenzschichteinfluss auf die bewegungsinduzierten Luftkräfte durch die Gegenüberstellungen von Lösungen der Euler- und RANS-Gleichungen isolieren. Die modulare Software-Struktur erlaubt zudem sowohl den Einsatz der kommerziellen Software MSC Nastran für komplexe Strukturmodelle als auch des LSODE-Algorithmus (engl.: *Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*) zur Lösung der von Kármán'schen Plattengleichung. Des Weiteren beschreibt Kapitel 4 die Implementierung eines partitionierten Lösungsansatzes in Fortran zur Kopplung des LSODE-Algorithmus mit Strömungsmodellen auf Basis der linearisierten Potentialgleichung. Dieser Ansatz berücksichtigt folglich keine nichtlinearen Strömungsphänomene und eignet sich lediglich für einfache Schalengeometrien. Dennoch stellt er aufgrund der kurzen Rechendauer ein effizientes Verfahren dar, um für die numerisch aufwendigeren Modelle relevante Parameter Räume zu identifizieren und einen Vergleich verschiedener Modellansätze zu ermöglichen. Da die Implementierung und Validierung der Lösungsalgorithmen einen grundlegenden Bestandteil dieser Arbeit bildet, aus wissenschaftlicher Sicht allerdings wenig neue Erkenntnisse liefert, wird dieser Arbeitsschritt in Abbildung 1.4 als „Verfahrensentwicklung“ betitelt.

In der ersten Betrachtungsebene (Kapitel 5) steht die aeroelastische Stabilität ebener Schalen im Fokus. Mithilfe der in Kapitel 4 vorgestellten Lösungsroutinen werden zunächst die Stabilitätsgrenzen zweidimensionaler Panelflatter-Konfigurationen für einen Machzahlbereich von  $0,8 \leq M_\infty \leq 2$  ermittelt und der relevante Parameterraum für anschließende Detailstudien eingegrenzt. In diesem Kontext werden verschiedene Modellierungsaspekte, zum Beispiel der Einfluss der Turbulenzmodellierung auf die Stabilitätsgrenze, diskutiert. Anschließend wird systematisch untersucht, inwieweit sich der dämpfende Charakter der Grenzschicht auf den instabilen Zustandsbereich übertragen lässt, d.h. zu einem gutmütigeren Verhalten des aeroelastischen Systems nach dem Überschreiten der Stabilitätsgrenze führt. Mittels einer stationär vorgegebenen Membranlast werden hierzu periodische und nicht-periodische Grenzzyklusschwingungen initiiert und mithilfe von Bifurkationsdiagrammen, frequenzbasierten Amplitudenspektren, Phasenraumportraits modaler Freiheitsgrade und Poincarédarstellungen analysiert. Für die Betrachtungsebene 1 wird hierbei die folgende Leithypothese formuliert:

**Hypothese 1:** Die Präsenz turbulenter Grenzschichten führt in schallnahen Strömungen tendenziell zu einem Anstieg der aeroelastischen Stabilitätsgrenze ebener Schalen und beim Überschreiten dieser zu gutmütigeren Eigenschaften dynamisch instabiler Systemzustände.



In der zweiten Betrachtungsebene (Kapitel 6) wird die Bewegung der Struktur vorgegeben und das daraus resultierende aerodynamische Antwortproblem in einem zunehmenden Detailgrad analysiert. Zu diesem Zweck werden die aerodynamischen Übertragungsfunktionen für harmonische Störfunktionen ermittelt und diese im Frequenzbereich hinsichtlich des Energietransfers zwischen Strömung und Struktur sowie des Grenzschichteinflusses ausgewertet. Durch die Reduktion sämtlicher Grenzschichteigenschaften auf ein sehr vereinfachtes Geschwindigkeitsprofil gelingt ein analytischer Zugang zu der Abstrahlcharakteristik bewegungsinduzierter Störungen und der daraus resultierenden Stördruckverteilung auf der Schalenoberfläche. Die Ergebnisse werden anschließend numerischen Lösungen der Euler- und RANS-Gleichungen gegenübergestellt, um neben einer Verifizierung der vereinfachten Modellgleichungen den Gültigkeitsbereich der analytisch gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich aerodynamischer Nichtlinearitäten und geometrischer Randbedingungen zu bewerten. Motiviert durch die gute Übereinstimmung der *shear-flow*-Theorie mit experimentellen Daten (vgl. Abbildung 1.2(b)) orientiert sich die zweite Betrachtungsebene an der folgenden Leithypothese:

**Hypothese 2:** Der dämpfende Charakter turbulenter Grenzschichten ist auf die Reduktion der lokalen Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht und einer daraus resultierenden Beeinflussung der bewegungsinduzierten Stördruckverteilung zurückzuführen.

Die dritte Betrachtungsebene (Kapitel 7) widmet sich abschließend der Frage, inwieweit sich der dämpfende Charakter turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastischen Eigenschaften axial umströmter zylindrischer Schalen übertragen lässt. Wenngleich Panelflattern im Regelfall als lokales Phänomen in Erscheinung tritt und sich die in Abbildung 1.1(a) dargestellte Problemstellung eher über eine ebene Schale approximieren lässt, ist eine aeroelastische Instabilität ganzer Stufenverkleidungen nicht per se auszuschließen [24]. Über eine Stabilitätsanalyse einer Kreiszyklinderschale, die aufgrund der Schwerpunktsetzung dieser Arbeit auf eine empirische Charakterisierung der Systemdynamik in supersonischen Strömungen beschränkt ist, seien die entgegengesetzten Enden der Bandbreite von ebenen bis kreiszyklindrischen Schalen betrachtet. Die aeroelastischen Eigenschaften gekrümmter Schalensegmente sollten sich daher zwischen den in dieser Arbeit betrachteten Konfigurationen ansiedeln. Kapitel 7 baut auf die folgende, in der Literatur kontrovers diskutierte Hypothese [26] auf:

**Hypothese 3:** Die Präsenz turbulenter Grenzschichten führt bei der axialen Umströmung kreiszyklindrischer Schalen zu einer Dämpfung aeroelastischer Instabilitäten und ist daher im Rahmen numerischer Stabilitätsanalysen zu berücksichtigen.

Die Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit werden abschließend in Kapitel 8 zusammengefasst. In diesem Rahmen wird zudem die Relevanz der Ergebnisse für verwandte Themenbereiche, etwa für die Entwicklung aerodynamischer und aeroelastischer Ersatzmodelle (Verfahren reduzierter Ordnung), diskutiert. Erkenntnisse bezüglich der Stabilitätseigenschaften kreiszyklindrischer Schalen, die sich von jenen ebener Schalen unterscheiden, werden abschließend genutzt, um Forschungsfragen für weiterführende Arbeiten vorzuschlagen.



## 2 Theoretische Vorbetrachtungen und Anforderungsanalyse

Anhand einer vereinfachten Stabilitätsanalyse der in Abbildung 1.1(b) dargestellten ebenen Schale lassen sich grundlegende aeroelastische Systemeigenschaften identifizieren, an denen sich das weitere Vorgehen dieser Arbeit orientiert. So wird in Abschnitt 2.1 zunächst der Mechanismus der aerodynamischen Kopplung zweier Eigenschwingungsformen bei hohen supersonischen Machzahlen erläutert und darauf aufbauend in Abschnitt 2.2 die Bedeutung der aerodynamischen Dämpfungsterme in einer niedrigen Überschallströmung abgeleitet. Abschnitt 2.3 beschreibt den Zusammenhang zwischen den generalisierten Luftkräften und der am System verrichteten Arbeit, um an späterer Stelle die Interpretation dynamischer Nichtlinearitäten des Strömungsfeldes zu vereinfachen. Zudem werden in Abschnitt 2.4 dimensionslose aerodynamische und aeroelastische Ähnlichkeitsparameter eingeführt, auf denen alle weiteren Betrachtungen dieser Arbeit basieren. Aus den Erkenntnissen dieses Kapitels werden abschließend in Abschnitt 2.5 die Anforderungen an die Modellierung des Strömungs- und Strukturfeldes abgeleitet.

### 2.1 Approximative Stabilitätsanalyse einer ebenen Schale

Es sei zunächst eine allseitig gelenkig gelagerte ebene Schale in einem supersonischen Strömungsfeld betrachtet (vgl. Abbildung 1.1(b); angelehnt an Herleitungen von Dowell [27]). Die geometrische Grundform der Schale in der  $x$ - $y$ -Ebene sei beliebig. Einige fundamentale Gleichungen werden zudem als gegeben angenommen und anschließend in Kapitel 3 detaillierter erläutert. Das aeroelastische Systemverhalten sei sowohl statisch als auch dynamisch linear. Daher bietet es sich an, die zugrundeliegende Bewegungsgleichung in generalisierten (modalen) Koordinaten  $q_s$  zu formulieren:

$$M_s \left( \ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s \right) + q_\infty Q_s = 0 . \quad (2.1)$$

Hierbei ist  $\omega_s$  die Eigenkreisfrequenz und  $M_s$  die generalisierte Masse des  $s$ -ten modalen Freiheitsgrades der Struktur:

$$M_s = \iint m \psi_s^2 dx dy , \quad (2.2)$$

wobei  $m$  die Masse pro Einheitsfläche und  $\psi_s(x)$  die Eigenschwingungsform beschreibt. Der zweite Term in Gleichung (2.1) repräsentiert die generalisierte Luftkraft, die sich aus einer Projektion der Druckdifferenz  $\Delta p(x, t)$  zwischen der Schalenober- und Unterseite auf die entsprechende Eigenschwingungsform  $\psi_s(x)$  ergibt:

$$Q_s = \iint \frac{\Delta p}{q_\infty} \psi_s dx dy . \quad (2.3)$$

Für hohe supersonische Machzahlen ( $M_\infty \gg 1$ ) erweist sich die sogenannte *Piston*-Theorie von Lighthill [28] als eine gute Approximation der aerodynamischen Drucklasten  $\Delta p(x, t)$ :

$$\Delta p = \frac{2q_\infty}{M_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right). \quad (2.4)$$

Indem die Verformung  $w(x, t)$  mittels eines Modalansatzes in generalisierte Koordinaten  $q_s(t)$  überführt:

$$w = \sum_s q_s \psi_s \quad (2.5)$$

und Gleichung (2.4) in (2.3) substituiert wird, lässt sich die generalisierte Luftkraft  $Q_s(t)$  ausdrücken als:

$$Q_s = \sum_r \frac{2}{M_\infty} \left( q_r \iint \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \psi_s \, dx \, dy + \frac{\dot{q}_r}{U_\infty} \iint \psi_r \psi_s \, dx \, dy \right). \quad (2.6)$$

Die Gleichungen (2.1) bis (2.6) beschreiben das aeroelastische System noch sehr allgemeingültig. Im speziellen Fall einer rechtwinkligen, allseitig eingespannten Schale der Länge  $L$  und Breite  $B$ , die durch isotrope Materialeigenschaften mit einer konstanten Masse  $m$  und Steifigkeit  $D$  charakterisiert sei, lässt sich die Eigenfrequenz des  $s$ -ten modalen Freiheitsgrades (mit den Halbwellenzahlen  $s_x$  und  $s_y$  respektive in  $x$ - und  $y$ -Richtung) bestimmen durch:

$$\omega_s^2 = \frac{D}{m} \left[ \left( \frac{s_x \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{s_y \pi}{B} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

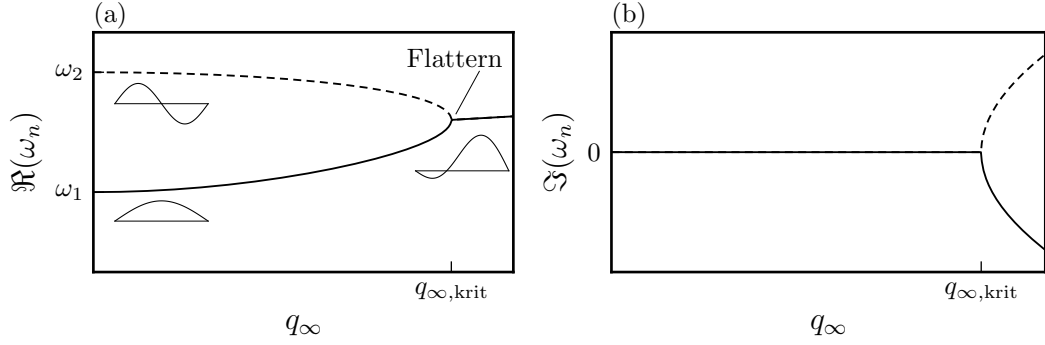
Für eine Anströmung parallel zur  $x$ -Koordinatenachse kann  $s_y = 1$  gesetzt werden, da höhere Wellenzahlen orthogonal zur Anströmung keiner aerodynamischen Kopplung unterliegen [6]. Im Rahmen dieses einführenden Beispiels ist es zudem zweckmäßig, die Systemgleichungen im Frequenzbereich zu betrachten. Über den Ansatz  $q_s(t) = \bar{q}_s e^{i\omega t}$  wird die Bewegungsgleichung (2.1) in ein komplexes Eigenwertproblem mit den Eigenwerten  $\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$  überführt. Die Substitution der generalisierten Luftkraft (2.6) in Gleichung (2.1) ergibt demnach:

$$M_s (\omega_s^2 - \omega^2) \bar{q}_s + q_\infty \sum_r \bar{Q}_{rs} = 0 \quad (2.8)$$

mit  $\bar{Q}_{rs} = \bar{q}_r \bar{\bar{Q}}_{rs}$  und

$$\bar{\bar{Q}}_{rs} = \frac{2}{M_\infty} \left( \iint \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \psi_s \, dx \, dy + \frac{i\omega}{U_\infty} \iint \psi_r \psi_s \, dx \, dy \right). \quad (2.9)$$

An dieser Stelle lassen sich bereits einige grundlegende Eigenschaften des betrachteten Systems ableiten. So zeigen die Orthogonalitätseigenschaften der Eigenschwingungsformen  $\psi_s$ , dass der Dämpfungsterm ( $\propto i\omega$ ) in Gleichung (2.9) nur für  $r = s$  ungleich Null ist und somit die aerodynamische Dämpfung derjenigen Eigenschwingungsform  $\psi_s$  beschreibt, die das Strömungsfeld stört. Folglich ist die resultierende Luftkraft  $\bar{Q}_s = \sum_r \bar{Q}_{rs}$  eine Funktion der Machzahl  $M_\infty$  und der Frequenz  $\omega$ . Für große Machzahlen  $M_\infty \gg 1$  ist der Dämpfungsterm jedoch vernachlässigbar klein. In diesem Fall ist  $\bar{Q}_s$  eine von  $\omega$  unabhängige, rein reelle Größe. Anhand des verbleibenden Terms in Gleichung (2.9) lässt sich mithilfe einer partiellen Integration nachweisen, dass für die aerodynamischen Kopplungsterme  $\bar{\bar{Q}}_{12} = -\bar{\bar{Q}}_{21}$  gilt, da aufgrund der Einspannung  $w(x = 0, y, t) = 0$  und  $w(x = L, y, t) = 0$



**Abbildung 2.1:** Qualitative Entwicklung der Eigenwerte einer ebenen Schale im Überschall und dazugehörige Schwingungsformen.

ist:

$$\iint \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \psi_s \, dx \, dy = \int \psi_r \psi_s \Big|_0^L \, dy - \iint \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \psi_r \, dx \, dy . \quad (2.10)$$

Diese Beziehung ist, wie im Folgenden gezeigt wird, von fundamentaler Bedeutung für den zugrundeliegenden Flattermechanismus. Unter Berücksichtigung von zwei Freiheitsgraden lässt sich Gleichung (2.8) in Matrixnotation darstellen als:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1(\omega_1^2 - \omega^2) + q_\infty \bar{\bar{Q}}_{11} & q_\infty \bar{\bar{Q}}_{21} \\ -q_\infty \bar{\bar{Q}}_{21} & M_2(\omega_2^2 - \omega^2) + q_\infty \bar{\bar{Q}}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} . \quad (2.11)$$

Aus  $\det(\mathbf{A}) = 0$  und der Annahme, dass  $\bar{\bar{Q}}_{11}$  und  $\bar{\bar{Q}}_{22}$  im hohen Überschallbereich vernachlässigbar klein sind [27], folgt die nichttriviale Lösung:

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} - \frac{q_\infty^2 \bar{\bar{Q}}_{21}^2}{M_1 M_2}} . \quad (2.12)$$

Für  $q_\infty > 0$  kommt es demnach zu einer aerodynamischen Kopplung der Systemfreiheitsgrade. Abbildung 2.1 illustriert dies anhand der reellen und imaginären Komponenten der Eigenwerte  $\omega(q_\infty)$ . Durch die Beziehung  $\bar{\bar{Q}}_{12} = -\bar{\bar{Q}}_{21}$  führt ein Anstieg des Staudrucks  $q_\infty$  zu einer Koaleszenz der Eigenwerte  $\Re(\omega_1)$  und  $\Re(\omega_2)$ . Bei einem kritischen Wert des Staudrucks  $q_\infty = q_{\infty, \text{krit}}$  wird der Radikant in Gleichung (2.12) Null, wodurch beide Eigenwerte mit  $\omega_{\text{krit}} = \Re(\omega) = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}/2$  zueinander identisch sind. Diese Lösung beschreibt die aeroelastische Stabilitätsgrenze und damit das Einsetzen des sogenannten Mehr-Freiheitsgrad-Flutterns (in der englischen Literatur als *coupled-mode-Flutter* bezeichnet). Über  $q_{\infty, \text{krit}}$  hinaus beschreiben die Eigenwerte eine oszillierende und exponentiell angefachte Schwingung, da  $\Re(\omega_s) \neq 0$  und für mindestens einen modalen Freiheitsgrad  $\Im(\omega_s) < 0$  ist.

In Kapitel 1 wurde die Trajektorie der Trägerrakete Saturn V vorgestellt (vgl. Abbildung 1.3). Um einen Eindruck von den Größenordnungen relevanter Parameter hinsichtlich der praktischen Anwendung zu bekommen, sei exemplarisch eine ebene Schale bei  $M_\infty = 2$  betrachtet. Die *Piston*-Theorie stellt hier bereits eine gute Approximation der aerodynamischen Lasten dar. Die Rakete erreicht diese Machzahl etwa 90 s nach dem Start

und ist dabei einem dynamischen Druck von  $q_\infty \approx 30\,125\text{ Pa}$  ausgesetzt. Eine allseitig gelenkig gelagerte ebene Schale aus Aluminium mit den Randmaßen  $L = 1\text{ m}$  und  $B = 1\text{ m}$  benötigt demnach eine Dicke von  $h > 2,3\text{ mm}$ , da hierfür der Radikant in Gleichung (2.12) positiv bleibt und folglich  $\Im(\omega) = 0$  ist. Durch Einsetzen der Eigenwerte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  in Gleichung (2.11) lässt sich zudem ein Amplitudenverhältnis von  $\bar{q}_2/\bar{q}_1 \approx -0,67$  bestimmen. Aus der Überlagerung der ersten und zweiten Eigenschwungsform ergibt sich somit die aeroelastische Schwungsform mit einem lokalen Verformungsmaximum bei  $\xi \approx 0,75$ , wie schematisch in Abbildung 2.1 dargestellt ist. Auf dieses Ergebnis wird im Rahmen der numerischen Verfahrensvalidierung detaillierter eingegangen.

## 2.2 Arten der aeroelastischen Instabilität

Aus einer qualitativen Betrachtung der generalisierten Luftkräfte  $\bar{\bar{Q}}_{rs}$  lassen sich Rückschlüsse auf verschiedene Arten aeroelastischer Instabilitäten ziehen. Eine solche Korrelation ist Voraussetzung für die Interpretation der analytisch und numerisch bestimmten Luftkräfte in der zweiten Betrachtungsebene (Kapitel 6).

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die aerodynamische Dämpfung für hohe Machzahlen als vernachlässigbar klein angenommen ( $\Im(\bar{\bar{Q}}_{rs}) \approx 0$ ). Über die Beziehung

$$\Re(\bar{\bar{Q}}_{rs}) \sim \iint \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \psi_s \, dx \, dy = \begin{cases} -\Re(\bar{\bar{Q}}_{sr}), & r \neq s \\ 0, & r = s \end{cases} \quad (2.13)$$

ließ sich anschließend die aerodynamische Kopplung der Eigenschwungsformen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  als verantwortlicher Mechanismus für die dynamische Instabilität identifizieren.

Die aerodynamischen Dämpfungsterme ( $\Delta p \propto \partial w / \partial t$ ) beeinflussen hingegen die Hauptdiagonalterme der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  aus Gleichung (2.11):

$$\Im(\bar{\bar{Q}}_{rs}) \sim \iint \psi_r \psi_s \, dx \, dy = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ > 0, & r = s \end{cases}. \quad (2.14)$$

Gemäß den Annahmen der *Piston*-Theorie sind diese stets positiv und haben daher einen dämpfenden Charakter. Für schallnahe Strömungen kann jedoch nicht mehr von einem quasistationären Charakter der bewegungsinduzierten Luftkräfte ausgegangen werden. Die physikalische Ursache hierfür lässt sich am besten aus einer allgemeingültigen Darstellung der generalisierten Luftkraft im Zeitbereich ableiten:

$$Q_{rs}(t) = q_r(t)S_{rs} + \dot{q}_r(t)D_{rs} + \int_0^t [q_r(\sigma)H_{rs}(t-\sigma) + \dot{q}_r(\sigma)I_{rs}(t-\sigma)] \, d\sigma. \quad (2.15)$$

Die Koeffizienten  $S_{rs}$ ,  $D_{rs}$ ,  $H_{rs}$  und  $I_{rs}$  seien an dieser Stelle nur von qualitativem Interesse und werden in Kapitel 3 auf Grundlage der linearisierten Potentialtheorie näher erläutert. Die ersten beiden Terme ( $\propto S_{rs}$  und  $D_{rs}$ ) entsprechen der *Piston*-Theorie und beschreiben somit den quasistationären Charakter der Strömung. Der Integralterm in Gleichung (2.15) zeigt zudem, dass die generalisierte Luftkraft auch von der retardierten Zeit  $\sigma$  beeinflusst wird. Unter Umständen kann dieser Effekt zu einer negativen aerodynamischen Dämpfung, äquivalent zu  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{ss}) < 0$  im Frequenzbereich, führen. In diesem Fall hat die Störung eines modalen Freiheitsgrades einen anfachenden Charakter auf sich selbst, weshalb diese Art der dynamischen Instabilität als Ein-Freiheitsgrad-Flattern bezeichnet wird.

Gleichung (2.15) hat ebenso in subsonischen Strömungen Gültigkeit. Als wesentliches Merkmal leitet Dowell [27] für den Frequenzbereich den Zusammenhang

$$\overline{\overline{Q}}_{rs} = \Re(\overline{\overline{Q}}_{rs}) \sim \iint \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} dx dy = \begin{cases} = 0, & r \neq s \\ < 0, & r = s \end{cases} \quad (2.16)$$

ab. Aus der Bewegungsgleichung (2.8) geht für einen einzelnen modalen Systemfreiheitsgrad hervor, dass der Eigenwert  $\omega$  für  $q_\infty > q_{\infty, \text{krit}}$  nach

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{2q_\infty}{M_1} \overline{\overline{Q}}_{11}} \quad (2.17)$$

einen rein imaginären Wert annimmt und das aeroelastische System statisch divergiert (aeroelastisches Beulen).

## 2.3 Energiebetrachtung oszillierender Systeme

In der energetisch formulierten Bewegungsgleichung (2.1) stellt die generalisierte Luftkraft  $Q_s(t)$  den einzigen dissipativen Term dar. Unter der Annahme, dass die bewegungsinduzierten Störungen des Strömungsfeldes klein sind und die instationären Luftkräfte somit einen dynamisch linearen Charakter aufweisen, bietet sich eine Betrachtung der generalisierten Luftkraft  $\overline{\overline{Q}}_{rs}$  im Frequenzbereich für die Analyse des Energietransfers zwischen dem Strömungs- und Strukturfeld an.

Der Einfluss dynamisch nichtlinearer Strömungsphänomene auf die instationäre Luftkraft lässt sich zwar ebenfalls über eine ausreichend hohe Anzahl generalisierter Freiheitsgrade abbilden. Da die Euler- und RANS-Gleichungen in der vorliegenden Arbeit jedoch in kartesischen Freiheitsgraden gelöst werden, erweist es sich für die Analyse des resultierenden Energietransfers als zweckmäßiger, die vom Fluid an der Struktur verrichtete Arbeit über einen Schwingungszyklus  $W_{\text{cyc}}$  direkt über die Beziehung

$$W_{\text{cyc}} = \int_0^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dt = \oint_A \int_0^T -(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} p) dt dA \quad (2.18)$$

zu bestimmen. Ein positiver Energieeintrag ( $W_{\text{cyc}} > 0$ ) weist darauf hin, dass die Struktur dem Fluid Energie entzieht und die Schwingung dynamisch angefacht wird. Über einen harmonischen Ansatz für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$  und die aerodynamischen Lasten  $p(\mathbf{x}, t) = \overline{p}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$  lässt sich der Zusammenhang

$$W_{\text{cyc}} = \Re(\overline{W}) = \Re \left( i\pi q_\infty \sum_s \overline{q}_s^* \overline{Q}_s \right) \quad (2.19)$$

ableiten (siehe May [29] für eine detaillierte Herleitung). Darin stellt  $\overline{W} = \sum_s \overline{W}_s$  die komplexe Arbeit im Frequenzbereich dar. Der Realteil  $\Re(\overline{W})$  beschreibt den eigentlichen Energieaustausch zwischen Strömung und Struktur, während der Imaginärteil  $\Im(\overline{W})$  als dynamische Energieumverteilung ohne effektiven Energietransfer über die Periodendauer  $T$  eines Schwingungszyklus interpretiert werden kann.

## 2.4 Aeroelastische Ähnlichkeitsparameter

Die dimensionslose Charakterisierung des aeroelastischen Systems erfolgt über das Verhältnis aus aerodynamischen Kräften zu elastischen Kräften:

$$\lambda = 2q_\infty \frac{L^3}{D}, \quad (2.20)$$

wobei  $q_\infty$  den dynamischen Druck der Anströmung,  $L$  die überströmte Länge und  $D$  die Steifigkeit der Struktur beschreibt. Das dimensionslose Massenverhältnis  $\mu$  setzt die Dichte der freien Anströmung  $\rho_\infty$  mit der Strukturdichte  $\rho^s$  ins Verhältnis und variiert, multipliziert mit dem Verhältnis aus der Länge  $L$  und Dicke  $h$  der überströmten Schale, für typische Luft- und Raumfahrtanwendungen zwischen 0,1 und 0,01:

$$\mu = \frac{\rho_\infty L}{\rho^s h}. \quad (2.21)$$

Die reduzierte Frequenz  $k$  skaliert eine beliebige Kreisfrequenz  $\omega$  mit der Zeit, die ein mit  $U_\infty$  bewegtes Fluidpartikel für die Überströmung der Länge  $L$  benötigt:

$$k = \frac{\omega L}{U_\infty}. \quad (2.22)$$

Externe Lasten in der Schalenebene  $N_{x0}$  und  $N_{y0}$  werden in dieser Arbeit ebenfalls mit der Steifigkeit  $D$  und der Länge  $L$  in Beziehung gesetzt:

$$R_x = -\frac{N_{x0}L^2}{\pi^2 D}, \quad R_y = -\frac{N_{y0}L^2}{\pi^2 D}. \quad (2.23)$$

Anhand dieser Ähnlichkeitsparameter lässt sich die Komplexität der zu untersuchenden Parameterräume deutlich reduzieren. Die zeitvarianten Systemparameter beziehen sich zudem auf eine Normierung der Zeit  $t$  mit jener Zeitspanne, die ein Fluidpartikel der Geschwindigkeit  $U_\infty$  für die Überströmung der Länge  $L$  benötigt:

$$\tau = t \frac{U_\infty}{L}. \quad (2.24)$$

Im Fall variierender Strömungsrandbedingungen kann es sich zudem anbieten, in Gleichung (2.24) die Strömungsgeschwindigkeit  $U_\infty$  mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen in der Struktur zu ersetzen. Hieraus folgt:

$$\tau^s = t \sqrt{\frac{D}{\rho^s h L^4}}. \quad (2.25)$$

Alle weiteren dimensionslosen Parameter und Kenngrößen, die im Rahmen dieser Arbeit Anwendung finden, werden an entsprechender Stelle erläutert.



## 2.5 Modellanforderungen und Lösungsansätze

In den vorangegangenen Diskussionen wurde für eine generische ebene Schale gezeigt, dass im niedrigen Überschall neben dem klassischen Flattern, das durch eine Koaleszenz zweier Eigenschwingungsformen gekennzeichnet ist, die Möglichkeit des sogenannten Ein-Freiheitsgrad-Flatterns besteht. Die aerodynamische Anfachung einer einzelnen Eigenschwingungsform verlangt nach einer gänzlich instationären Modellierung der bewegungsinduzierten Luftkräfte. Des Weiteren sind zur Beantwortung der eingangs formulierten Forschungsfrage sowohl die viskosen Eigenschaften des Fluids als auch nichtlineare Strömungsphänomene, z.B. Verdichtungsstöße (Erzeugung von Entropie), in den Modellierungsansätzen zu berücksichtigen. Diesen Anforderungen entsprechen die numerischen Lösungen der Euler- und RANS-Gleichungen auf Basis eines Finite-Volumen-Verfahrens (FVV). Trotz der Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechnerarchitekturen ist zudem die numerische Effizienz der eingesetzten Lösungsverfahren eine wesentliche Voraussetzung dafür, relevante Parameterkombinationen für Detailstudien identifizieren zu können und auf diese Weise numerisch aufwendigere Verfahren effizient einzusetzen. Die Einstufung als „effizientes“ Verfahren orientiert sich hierbei an Lösungszeiten in der Größenordnung von Sekunden bis Minuten und lässt sich durch den Einsatz der *Piston*-Theorie oder der linearisierten Potentialtheorie erreichen. Tabelle 2.1 gibt eine Übersicht über die in dieser Arbeit gewählten Strömungsmodelle mit Bezug auf die oben genannten Anforderungen. Eine detaillierte Beschreibung der Modellgleichungen folgt anschließend in Kapitel 3.

**Tabelle 2.1:** Anforderungen an die Strömungsmodelle.

	numerische Effizienz	Instationarität	Rotation, nicht-isentrop	Reibung
<i>Piston</i> -Theorie	✓			
Linearisierte Potentialtheorie	✓	✓		
Euler-Gleichungen		✓	✓	
RANS-Gleichungen		✓	✓	✓

Aus strukturdynamischer Sicht kommt hinzu, dass aufgrund der allseitigen Lagerung ein signifikant nichtlinearer Zusammenhang zwischen der Struktursteifigkeit und der Verformungsamplitude besteht. Kann diese geometrische Nichtlinearität bei der Bestimmung aeroelastischer Stabilitätsgrenzen vernachlässigt werden, so begrenzt sie im instabilen Zustandsbereich die Verformungsamplitude. Dadurch stellt sich im Unterschall üblicherweise aeroelastisches Beulen und im Überschall eine Grenzzyklusschwingung ein. Des weiteren ist zu berücksichtigen, dass nicht nur transversale Luftkräfte, sondern auch Membranlasten, die zum Beispiel aus der Verformungen der angrenzenden Struktur oder aus thermalen Materialdehnungen resultieren, einen Einfluss auf die Systemdynamik haben. Dementsprechend handelt es sich selbst bei generischen Panelflatter-Konfigurationen um hochgradig nichtlineare Systeme, deren Lösungen für  $\lambda > \lambda_{\text{krit}}$  durch mehrfach-periodische oder chaotische Attraktoren charakterisiert sein können. Um den strukturdynamischen Anforderungen gerecht zu werden, sei in dieser Arbeit ein geometrisch nichtlineares und materiell lineares elastodynamisches Modell mit homogenen, isotropen Materialeigenschaften gewählt, welches hinsichtlich vereinfachender Annahmen für dünnwandige Schalen nach der Mindlin'schen Plattentheorie formuliert wird. Die Lösung der strukturdynamischen

Modellgleichung auf Basis der Finiten-Elemente-Methode (FEM) ermöglicht die Analyse komplexer Geometrien und findet in dieser Arbeit bei der Modellierung ebener und kreiszylindrischer Schalen Anwendung. Die empirische Analyse nichtlinearer Panelflatter-Phänomene erfordert jedoch eine Vielzahl einzelner Rechnungen. In diesem Zusammenhang erweist sich der Einsatz einer FEM aufgrund der hohen Anzahl an Systemfreiheitsgraden als problematisch. Daher wird zusätzlich die von-Kármán'sche Plattengleichung mittels eines modalen Galerkin-Verfahrens gelöst, um der Anforderung nach numerischer Effizienz gerecht zu werden. Tabelle 2.2 fasst die gewählten Strukturmodelle in Bezug auf die erläuterten Anforderungen zusammen.

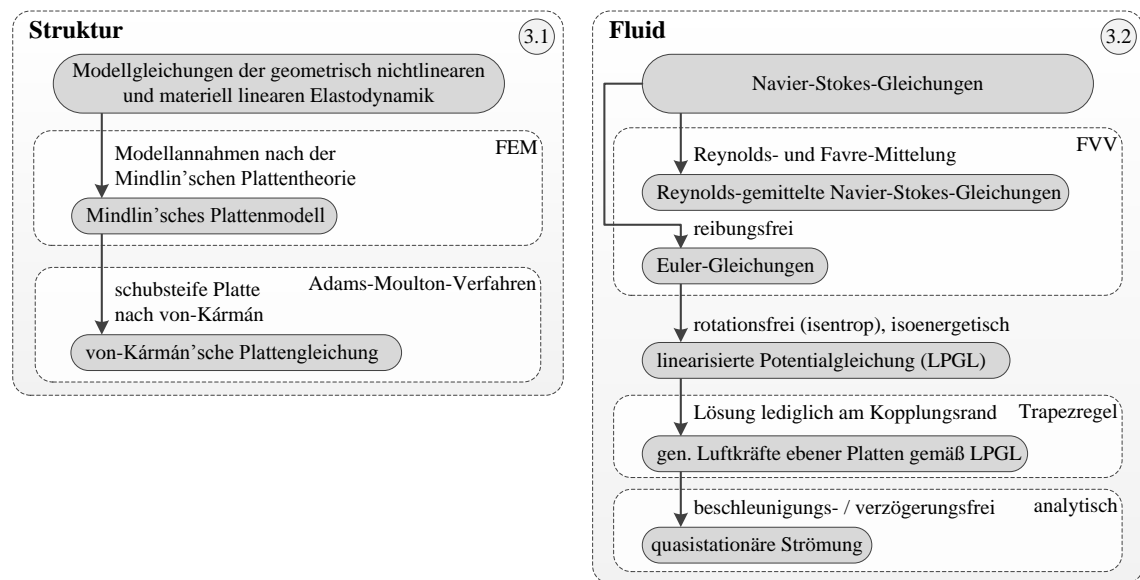
**Tabelle 2.2:** Anforderungen an die Strukturmodelle.

	numerische Effizienz	geometrische Komplexität	geometrische Nichtlinearität
von-Kármán'sche Plattengleichung & Galerkin-Ansatz	✓		✓
Mindlin'sche Plattentheorie & Prinzip der virtuellen Arbeit / FEM		✓	✓

Zwar verdeutlicht Abschnitt 2.1, dass es sich als vorteilhaft erweisen kann, das aeroelastische Gesamtsystem im Frequenzbereich zu betrachten. Bei großen Verformungsamplituden haben allerdings nicht nur statische, sondern auch dynamische Nichtlinearitäten einen signifikanten Einfluss auf die Systemeigenschaften. Im Rahmen der numerischen Studien werden die Modellgleichungen daher im Zeitbereich gelöst. Für die beiden Teildisziplinen Strömungsmechanik und Strukturdynamik stehen hierfür leistungsfähige Integrationsverfahren zur Verfügung, die hinsichtlich der jeweiligen physikalischen und numerischen Herausforderungen optimiert sind. Der daraus abgeleiteten Forderung nach einem partitionierten Lösungsansatz wird durch die Implementierung eines seriell gestaffelten Kopplungsschemas mit Subiterationen entsprochen. Dessen modularer Charakter ermöglicht den einfachen Austausch der oben genannten Strömungs- und Strukturmodelle, wodurch sich zum einen der Einfluss der Modellierungsansätze auf die aeroelastischen Stabilitätseigenschaften analysieren lässt. Wenn anstelle der Struktur-Lösungsverfahren harmonische Anregungsfunktionen vorgegeben werden, lassen sich zum anderen die generalisierten Luftkräfte  $\overline{Q}_{rs}$  aus den Zeitbereichslösungen der Euler- und RANS-Gleichungen ableiten.

### 3 Modellbildung und Diskretisierungsverfahren

In Kapitel 2 wurden physikalische Modelle identifiziert, die sich zur Untersuchung der eingangs definierten Leithypothesen eignen. Als Basis für eine Beschreibung gekoppelter Problemstellungen werden im Folgenden zunächst die zugrundeliegenden Systemgleichungen der Strömungs- und Strukturfelder sowie die Wahl geeigneter Diskretisierungs- und Lösungsverfahren vorgestellt. Abbildung 3.1 stellt diese einander gegenüber.



**Abbildung 3.1:** Übersicht der verwendeten Modelle, Vereinfachungen und Lösungsansätze.

#### 3.1 Modellierung der Struktur

Zur Modellierung des Strukturfeldes wird ein Modell gewählt, das geeignet ist, große Verformungen wiederzugeben. Die Komplexität der zugrundeliegenden Modellgleichungen aus der geometrisch nichtlinearen und materiell linearen Elastodynamik wird sukzessive hinsichtlich vereinfachender Annahmen für dünnwandige ebene Schalen reduziert. Für die numerische Lösung des resultierenden Anfangsrandwertproblems werden zwei Ansätze verfolgt: ein Galerkin-Verfahren und die Finite-Elemente-Methode (FEM).

*Bemerkung 3.1:* Beide Verfahren sind eng miteinander verknüpft. So stellt die FEM eine spezielle Form des Galerkin-Verfahrens dar, die auf lokalen Ansatzfunktionen für finite Teilbereiche der Struktur basiert (siehe Braess [30] für einen Vergleich verschiedener

Variationsansätze in der Strukturdynamik). Zur Differenzierung der Methoden werden im Folgenden dennoch die Bezeichnungen „FEM“ und „Galerkin-Verfahren“ separat verwendet.

Da für diese Arbeit die kommerzielle Softwareumgebung MSC Nastran zur Berechnung der Strukturverformung zur Verfügung steht und die theoretischen Grundlagen der FEM und des Galerkin-Verfahrens ausführlich in der Literatur behandelt sind, seien in diesem Kapitel die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen und Lösungsverfahren lediglich in aller Kürze vorgestellt. Die Ausführungen orientieren sich dabei an den theoretischen Abhandlungen von Mok [31] sowie einschlägiger Fachliteratur, wobei insbesondere die Grundlagenwerke von Fung [32] und Chia [33] hervorzuheben sind. Der Fokus sei im Folgenden auf die wesentlichen Unterschiede zwischen den verwendeten Modellannahmen und Diskretisierungsmethoden in Hinblick auf Panelflatter-Problemstellungen gerichtet.

### 3.1.1 Kontinuumsmechanische Bewegungsgleichungen

#### Modellgleichungen in der Lagrange-Formulierung

Die Beschreibung der kinematischen und konstitutiven Beziehungen sowie der Bewegungsgleichung der Struktur erfolgt in der Lagrange-Formulierung, wobei als Referenzkonfiguration das betrachtete Kontinuum in seinem undeformierten Zustand zum Zeitpunkt  $t = t_0$  (totale Lagrange-Formulierung) dient. In dieser Formulierung ergibt sich das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  aus der Vektordifferenz zwischen der Momentan- ( $\mathbf{x}_R$ ) und der Referenzkonfiguration ( $\mathbf{x}_r$ ) eines jeden Materiepunktes des Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ . Der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  beschreibt entsprechend die lokale Verformung der Referenz- auf die Momentankonfiguration:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}_R}{\partial \mathbf{x}_r} = \nabla_r \mathbf{x}_R = \nabla_r \mathbf{u} + \mathbf{I} . \quad (3.1)$$

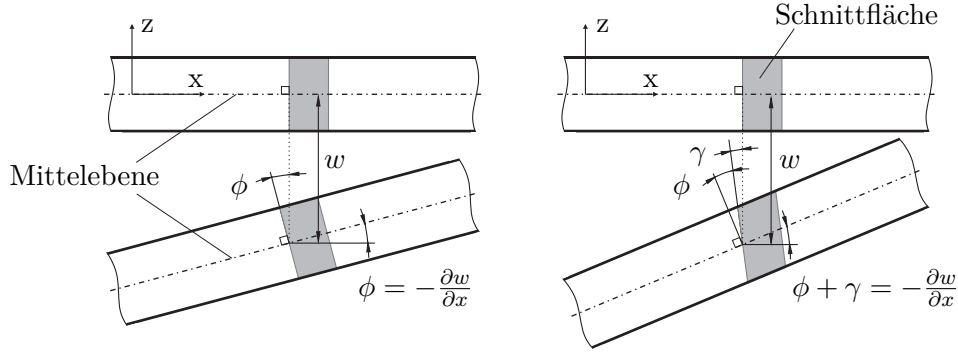
Da der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$ , ein unsymmetrischer, richtungsabhängiger und von Starrkörperanteilen beeinflusster Tensor, als Verzerrungsmaß ungeeignet ist, wird der daraus abgeleitete symmetrische, richtungsunabhängige und von Starrkörperanteilen befreite Green-Lagrange-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  herangezogen:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla_r \mathbf{u} + (\nabla_r \mathbf{u})^T + (\nabla_r \mathbf{u})^T \cdot \nabla_r \mathbf{u}) . \quad (3.2)$$

Der 2te Piola-Kirchhoff-Spannungstensor bezieht den symmetrischen Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , über den in der Momentankonfiguration die „wahren“ physikalischen Spannungen repräsentiert werden, auf die Referenzkonfiguration und stellt somit das zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor energetisch konjugierte Spannungsmaß dar:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F})^{-T} , \quad (3.3)$$

wobei  $J = \det(\mathbf{F})$  sei. Letztendlich sei die aus der Impulsbilanz hervorgehende Bewegungsgleichung in die Lagrange-Darstellung überführt. Da ein dynamisches System mit zeitabhängigen Kräften betrachtet wird, müssen auch die Verzerrungen  $\mathbf{E}$  und Spannungen  $\mathbf{S}$  zeitabhängige Größen sein. Gemäß dem d'Alembert'schen Prinzip stellt die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der beschleunigungsproportionalen Trägheitskräfte  $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$



**Abbildung 3.2:** Kinematik der schubstarken von-Kármán-Platte (links) und der schubweichen Mindlin Platte (rechts).

eine hyperbolische Differentialgleichung für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  dar:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{b}_{\mathbf{r}} \quad \text{in } \Omega \times (0, T) . \quad (3.4)$$

Darin beschreibt  $\mathbf{b}_{\mathbf{r}}$  die internen Körperkräfte des Systems. Die Gleichungen (3.2) bis (3.4) zählen zu den strukturdynamischen Modellgleichungen. Zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}) \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}, t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}) \quad \text{in } \Omega , \quad (3.5)$$

den vorgeschriebenen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  auf den Dirichlet-Rändern  $\Gamma_u$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}, t) \quad \text{auf } \Gamma_u \times (0, T) \quad (3.6)$$

und den vorgeschriebenen Spannungen  $\hat{\mathbf{t}}$  auf den Neumann-Rändern  $\Gamma_\sigma$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}, t) = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{\mathbf{r}}, t) \quad \text{auf } \Gamma_\sigma \times (0, T) \quad (3.7)$$

ergibt sich das zu lösende Anfangsrandwertproblem.

### Reduktion der Modellgleichungen

Da in dieser Arbeit ebene Schalen in der  $x$ - $y$ -Ebene betrachtet werden, lassen sich die Modellgleichungen auf Basis folgender Hypothesen vereinfachen:

- (H1) Die Schalendicke  $h$  sei klein im Vergleich zu den übrigen geometrischen Dimensionen, daher  $h \ll L$  und  $h \ll B$ .
- (H2) Transversale Verschiebungen  $w$  seien in der Größenordnung der Schalendicke  $h$ , daher  $|h| = \mathcal{O}(w)$  und  $|w| \ll L$ .
- (H3) Die Neigung sei überall gering, daher  $|\partial w / \partial x| \ll 1$  und  $|\partial w / \partial y| \ll 1$ .
- (H4) Tangentiale Verschiebungen  $u$  und  $v$  seien vernachlässigbar klein.
- (H5) Alle Spannungskomponenten seien klein. Es gilt das Hooke'sche Gesetz.
- (H6) Es gilt die Kirchhoff-Hypothese: Zur Mittelfläche orthogonale Liniensegmente verbleiben nach der Deformation orthogonal zur selbigen (siehe Abbildung 3.2).

Unter Berücksichtigung der Hypothese (H5) lassen sich die Spannungen  $\mathbf{S}$  nach Gleichung (3.3) und Verzerrungen  $\mathbf{E}$  nach Gleichung (3.2) über das Hooke'sche Gesetz für homogene, isotrope und linear elastische Materialien in der Lagrange-Formulierung für den ebenen Spannungszustand zueinander in Beziehung setzen:

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{E} . \quad (3.8)$$

Die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  sind hierbei definiert als:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (3.9)$$

Darin ist  $E$  das Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktionszahl (auch Poissonzahl). Mit der Schalendicke  $h$  lässt sich die Steifigkeit  $D$  ausdrücken als:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.10)$$

Durch Einsetzen der konstitutiven Beziehung (3.8) in die Bewegungsgleichung (3.4) lässt sich unter Berücksichtigung der Hypothesen (H1) bis (H6) die von-Kármán'sche Plattengleichung für die Verschiebung  $w(x, y, t)$ :

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w = & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & + N_x^e \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p - p_\infty) \end{aligned} \quad (3.11)$$

und die Airy'sche Spannungsfunktion  $\Phi$  im ebenen Spannungszustand über

$$\frac{\nabla^4 \Phi}{Eh} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

ableiten [34]. Entsprechend der Kirchhoff-Hypothese (H6) wird die ebene Schale als schubstarr angenommen. Hierin liegt der Hauptunterschied zwischen den in dieser Arbeit verwendeten Modellannahmen, da im Kontext der FEM zusätzlich der Verzerrwinkel  $\gamma$  berücksichtigt wird und somit die Mindlin'sche Plattentheorie Anwendung findet. Abbildung 3.2 verdeutlicht dies exemplarisch in der  $x$ - $z$ -Schnittebene. Eine ausführliche Herleitung der von-Kármán'schen Plattengleichung findet sich u.a. in Referenz [34], während die Modellgleichungen nach Mindlin in [1] vorgestellt werden.

Abschließend seien die Randbedingungen auf  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$  spezifiziert. Die Spannungen  $\hat{\mathbf{t}}$  auf den Neumann-Rändern  $\Gamma_\sigma$  ergeben sich aus den zeitabhängigen äußeren (aerodynamischen) Lasten. An den Dirichlet-Rändern  $\Gamma_u$  werden die Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  vorgegeben, die folglich den sogenannten geometrischen Randbedingungen entsprechen. Die Untersuchungen beschränken sich in den folgenden Kapiteln auf allseitig gelenkig gelagerte und fest eingespannte Strukturen. Im Rahmen der nach den Hypothesen (H1) bis (H6) vereinfachten Modellgleichungen werden über die von-Kármán'sche Plattengleichung (3.11) rechtwinklige ebene Schalen mit den folgenden geometrischen Randbedingungen beschrieben:

$$w|_{\Gamma_u} = 0, \quad 0 = \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{\Gamma_u} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{\Gamma_u} & \text{gelenkig gelagert} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\Gamma_u} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{\Gamma_u} & \text{fest eingespannt} . \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Diskretisierung mittels Finite-Elemente-Methode

Zur approximativen Lösung des in Abschnitt 3.1.1 vorgestellten Anfangsrandwertproblems wird die FEM angewendet. Diese wird ausführlich von Bathe [35] beschrieben und sei daher an dieser Stelle nur kurz umrissen. Zunächst ist Gleichung (3.4) in die schwache Formulierung zu überführen. Dies kann zum Beispiel nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit erfolgen, welches auf der Annahme basiert, dass die bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung durch innere und äußere Systemkräfte verrichteten Arbeiten im Gleichgewicht stehen. Nach Integration der Gleichung (3.4) über  $\Omega$  und Multiplikation mit einer infinitesimal kleinen und beliebigen (aber kinematisch zulässigen) Variation des Verschiebungsfeldes  $\delta \mathbf{u}$ , sowie der daraus abgeleiteten Variation des Green-Lagrange-Verzerrungstensors  $\delta \mathbf{E}$ , ergibt sich entsprechend die Variationsformulierung der Bewegungsgleichung (3.4):

$$\int_{\Omega_r} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega_r + \int_{\Omega_r} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, d\Omega_r = \int_{\Omega_r} \mathbf{b}_r \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega_r + \int_{\Gamma_r} \hat{\mathbf{t}}_r \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_r . \quad (3.14)$$

In der integralen Darstellung (3.14) ist nun Gleichung (3.4) nur noch schwach erfüllt. Da sich die folgenden Betrachtungen weiterhin auf die totale Lagrange-Darstellung beziehen, sei auf den Index  $(\cdot)_r$  verzichtet.

#### Räumliche Diskretisierung

Die Raumdiskretisierung erfolgt, indem das Strukturgebiet  $\Omega$  in finite Elemente  $\Omega_e$  unterteilt wird. Anschließend wird die Variationsaufgabe (3.14) approximativ auf der Elementebene gelöst. Hierfür wird über örtlich formulierte Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_e$  der Zusammenhang zwischen den Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_e$  und dem zulässigen Verschiebungsfeld des Elementes  $\tilde{\mathbf{u}}_e$  hergestellt. Dies gilt analog für die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$ :

$$\tilde{\mathbf{u}}_e \approx \mathbf{N}_e \mathbf{u}_e , \quad \delta \tilde{\mathbf{u}}_e \approx \mathbf{N}_e \delta \mathbf{u}_e . \quad (3.15)$$

Unter Einbeziehung der kinematischen (3.2) und konstitutiven Beziehungen (3.3) ergibt sich schließlich die semidiskrete Formulierung des Anfangsrandwertproblems in Form eines algebraischen Gleichungssystems auf Elementebene:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_e + \mathbf{f}_{\text{int}}(\tilde{\mathbf{u}}_e) = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.16)$$

mit der Elementmassenmatrix  $\mathbf{M}_e$ , den verschiebungsabhängigen internen Kräften  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  und dem externen Lastvektor  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ . Für kleine Verformungen lässt sich Gleichung (3.16) über die lineare Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  ausdrücken:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_e + \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{u}}_e = \mathbf{f}_{\text{ext}} . \quad (3.17)$$

In Gleichung (3.16) sind keine Dämpfungsterme berücksichtigt, um an späterer Stelle die aerodynamischen Dämpfungseigenschaften isoliert betrachten zu können. Die Elementmatrizen  $\mathbf{M}_e$  und  $\mathbf{K}_e$  werden entsprechend der Hypothesen (H1) bis (H5) über isoparametrische Viereckselemente mit linearen Ansatzfunktionen bestimmt. Hierfür stellt Nastran eine Implementierung des QUAD4-Scheibenelementes nach MacNeal [36] bereit. Anschließend wird das Gesamtgleichungssystem durch Assemblieren der Elementmatrizen ermittelt. Analog zu Gleichung (3.16) lautet die semidiskrete Bewegungsgleichung für das Ge-



samtsystem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{ext}} . \quad (3.18)$$

### Zeitliche Diskretisierung

Für die numerische Integration der semidiskreten Bewegungsgleichung (3.18) wird die Integrationszeit  $t$  in diskrete, äquidistante Zeitintervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  unterteilt und nach einem impliziten *Generalized- $\alpha$* -Verfahren gelöst. Nach Chung & Hulbert [37] lässt sich das dynamische Gleichgewicht in Abhängigkeit zweier sogenannter *Shift*-Parameter  $\alpha_m$  und  $\alpha_f$  ausdrücken:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1+\alpha_m} + \mathbf{f}_{\text{int},i+1+\alpha_f} = \mathbf{f}_{\text{ext},i+1+\alpha_f} . \quad (3.19)$$

Darin sind:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1+\alpha_m} = (1 + \alpha_m)\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \alpha_m \mathbf{u}_i \quad (3.20a)$$

und

$$\mathbf{f}_{i+1+\alpha_f} \approx (1 + \alpha_f)\mathbf{f}_{i+1} - \alpha_f \mathbf{f}_i . \quad (3.20b)$$

Über  $\alpha_m$  und  $\alpha_f$  lässt sich die Stärke der numerischen Dissipation einstellen, um bei nichtlinearen Problemstellungen die energetische Stabilität des Lösungsverfahrens zu gewährleisten. In Anlehnung an die Untersuchungen von Mok [31] und den Empfehlungen aus Referenz [38] werden für diese Arbeit die Parameter  $\alpha_m = 0$  und  $\alpha_f = -0.05$  gewählt, um hochfrequente (parasitäre) Moden möglichst effektiv und niederfrequente Moden möglichst wenig zu dämpfen. Damit entspricht dieser Ansatz dem Hilber-Hughes-Taylor-Verfahren (auch HHT- $\alpha$ ) [39].

*Bemerkung 3.2:* Für ausführliche Erläuterungen zu den theoretischen Grundlagen und Studien zur numerischen Stabilität verschiedener Zeitintegrationsverfahren aus der Klasse der Newmark-Integrationsansätze [40], zu der auch das hier verwendete *Generalized- $\alpha$* -Verfahren zählt, sei die Arbeit von Mok [31] empfohlen.

Da bei den betrachteten Problemstellungen die Knotenkräfte nichtlinear von den Elementverschiebungen abhängen, ist im Rahmen der impliziten Zeitintegration die Lösung des algebraischen Gleichungssystems (3.16) zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  iterativ zu bestimmen. Hierfür kommt eine modifizierte Newton-Raphson-Iteration zum Einsatz. Für diese Arbeit werden bis zu zehn Iterationsschritte zugelassen, um eine ausreichende Konvergenz der Lösung zu gewährleisten.

*Bemerkung 3.3:* Iterative Lösungsmethoden für nichtlineare Anfangsrandwertprobleme werden allgemein von Klein [41] besprochen und die verwendete Nastran-Implementierung detailliert in Referenz [38] vorgestellt.

### 3.1.3 Diskretisierung mittels Galerkin-Verfahren

Eignet sich der Variationsansatz (3.14) nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten insbesondere für die Lösung komplexer Strukturgeometrien, so stellt die aus der Diskretisierung resultierende hohe Anzahl an Systemfreiheitsgraden und die iterative Bestimmung der nichtlinearen Steifigkeitsterme hohe Anforderungen an die verfügbare Rechenleistung. Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.1.1 definierten Hypothesen (H1) bis (H6) bietet sich für die Lösung der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11) alternativ das modale Galerkin-Verfahren nach Bubnov [42] an.



### Räumliche Diskretisierung

Zunächst sei die Bewegungsgleichung (3.11) über den Summenansatz

$$w = \sum_s q_s(\tau) \psi_s(\xi, \eta) \quad (3.21)$$

in generalisierte Koordinaten überführt und in Abhängigkeit der dimensionslosen Variablen  $\tau$  (Gleichung (2.24)),  $\xi = x/L$  und  $\eta = y/B$  ausgedrückt. Da aufgrund der Hypothesen (H1) bis (H6) lediglich die transversale Verschiebung  $w(\xi, \eta, \tau)$  von Bedeutung ist, sei an dieser Stelle die Komponentendarstellung herangezogen. Als Wichtungsfunktionen werden entsprechend die transversalen Eigenschwingungsformen  $\psi_s(\xi, \eta)$  der gelenkig gelagerten oder fest eingespannten Schale gewählt, die automatisch die geometrischen Randbedingungen des elastischen Systems nach Gleichung (3.13) erfüllen. So sei für  $0 \leq \xi \leq 1$  und  $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$ :

$$\psi_s(\xi) = \begin{cases} \sin(s\pi\xi) \cos(\pi\eta) & \text{gelenkig gelagert} \\ (\cos((s-1)\pi\xi) - \cos((s+1)\pi\xi)) (1 - \cos(2\pi\eta + \pi)) & \text{fest eingespannt} \end{cases} \quad (3.22)$$

Das Einsetzen des Summenansatzes (3.21) in Gleichung (3.12) liefert die Airy'sche Spannungsfunktion  $\Phi$ . Nach dem Galerkin-Verfahren ist die Bewegungsgleichung (3.11) erfüllt, wenn das integrale Mittel der Gleichung (3.11) mit den modalen Ansatzfunktionen  $\psi_s(\xi, \eta)$  gewichtet und Null gesetzt wird. Für die gelenkig gelagerte ebene Schale resultiert hieraus ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung in dimensionsloser Form [43]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_s}{d\tau^2} = & -q_s \pi^4 \left[ s^2 + \left( \frac{L}{B} \right)^2 \right]^2 - 3(1 - \nu^2) \pi^4 \left\{ \frac{q_s}{2} \left[ s^2 C_1 + \left( \frac{L}{B} \right)^2 C_2 \right] \right. \\ & \left. + \left( \frac{L}{B} \right)^4 \left[ C_3 + C_4 + \frac{C_5}{4} - \frac{C_6}{2} \right] \right\} \\ & + \frac{4\lambda}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \sum_r Q_{rs} - R_x \pi^2 s^2 q_s - R_y \left( \frac{L}{B} \right)^2 \pi^2 s^2 q_s, \quad (3.23) \end{aligned}$$

das für eine endliche Anzahl modaler Freiheitsgrade  $q_s$  näherungsweise lösbar ist. Die Koeffizienten  $C_1$  bis  $C_6$  entsprechen der Herleitung von Dowell [43] und sind der Vollständigkeit halber in Anhang A.1 zusammengefasst. Da in dieser Arbeit die Strukturdämpfung nicht berücksichtigt wird, enthält Gleichung (3.23) keine geschwindigkeitsproportionalen Anteile ( $\propto dq_n/d\tau$ ). In identischer Vorgehensweise ist die mathematisch komplexere Bewegungsgleichung für die fest eingespannte rechtwinklige Schale in der Dissertation von Ventres [44] abgeleitet. Diese wird in der vorliegenden Arbeit jedoch lediglich zu Vergleichszwecken in Kapitel 5 herangezogen.

Die Bestimmung der generalisierten Luftkraft  $Q_{rs}(\tau)$  nach Gleichung (2.15) wird ausführlich in Kapitel 3.2 beschrieben. Eine Rücktransformation der modalen Lösung in kartesische Koordinaten erfolgt wieder mithilfe des Summenansatzes (3.21).

### Zeitliche Diskretisierung

Die Zeitintegration des Gleichungssystems (3.23) erfolgt nach dem Adams-Moulton-Verfahren, einem impliziten Mehrschrittverfahren zur iterativen Lösung von Anfangsrandwertproblemen. Hierfür muss das System aus  $N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit  $\tau$  (siehe Abschnitt 2.4) zunächst in ein System erster Ordnung  $d\mathbf{q}/d\tau = \mathbf{f}(\mathbf{q}(\tau), \tau)$  überführt werden, wodurch sich die Anzahl der zu lösenden Gleichungen verdoppelt. Die Integration über die Zeitschritte  $i$  erfolgt anschließend nach dem Schema

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i-1} + h_i \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \mathbf{f}_{i-j}, \quad (3.24)$$

wobei für  $i = 0$  der Lösungsvektor  $\mathbf{q}_0 = [q_{0_1}, \dot{q}_{0_1}, \dots, q_{0_N}, \dot{q}_{0_N}]^T$  mit  $\dot{q}_{0_1} \neq 0$  initialisiert wird. Die iterative Lösung der Gleichung (3.24) erfolgt durch den von Hindmarsh entwickelten Fortran-Algorithmus *Livermore Solver for Ordinary Differential Equations* (LSODE) [45, 46]. Hierbei wird die Zeitschrittweite  $h$  und die Ordnung  $k$  je nach lokaler Fehlerverteilung, die sich auf vorgegebene Toleranzwerte bezieht, zwischen  $1 \leq k \leq 12$  variiert. Die Koeffizienten  $\beta$  hängen dabei lediglich von der Ordnung  $k$  ab. Ausführliche Erläuterungen zu diesem Schema und Details zur Implementierung in Fortran liefern Radhakrishnan et al. [47].

## 3.2 Modellierung der Aerodynamik

Strömungsmechanische Phänomene werden typischerweise in der Euler'schen Betrachtungsweise, d.h. in einem zeitlich und räumlich konstanten Kontrollvolumen aus der Perspektive eines raumfesten Beobachters beschrieben. Hinsichtlich der Fluid-Struktur-Interaktion ergibt sich hieraus jedoch eine Inkompatibilität am Kopplungsrand  $\Gamma_k$ , da das strukturdynamische Modell in der Lagrangen Betrachtungsweise formuliert ist (vgl. Kapitel 3.1). Die Diskretisierung der Modellgleichungen basiert daher auf der sogenannten *Arbitrary-Lagrangean-Eulerian-Methode* (ALE-Methode), in der die Verformungen des aerodynamischen Rechennetzes ebenfalls in der Lagrangen Betrachtung formuliert werden. Um die Unterschiede in den verwendeten Modellannahmen hervorzuheben, seien in Abschnitt 3.2.1 die aerodynamischen Grundgleichungen zunächst in der Euler'schen Betrachtungsweise vorgestellt. Anschließend findet in Abschnitt 3.2.2 die ALE-Methode zur Beschreibung der diskretisierten Modellgleichungen Anwendung.

### 3.2.1 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen

#### Erhaltungs- und Zustandsgleichungen kompressibler Fluide

Als Ausgangspunkt der Betrachtungen dienen die Navier-Stokes-Gleichungen, mittels derer im Rahmen der Kontinuumsmechanik die Dynamik eines kompressiblen Fluids über die Erhaltungssätze für Masse (3.25a), Impuls (3.25b) und Energie (3.25c) beschrieben wird. Unter Vernachlässigung jeglicher Volumenkräfte und Quellterme lauten die Erhaltungsgleichungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (3.25b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) . \quad (3.25c)$$

Darin bezeichnen die raum- und zeitabhängigen Variablen  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  die Dichte und den Geschwindigkeitsvektor des Fluids. Die volumenspezifische Gesamtenergie  $E(\mathbf{x}, t)$  ist als Summe der inneren Energie  $e(\mathbf{x}, t)$  und der kinetischen Energie des Fluids

$$E = e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \quad (3.26)$$

definiert und die Wärmeleitung  $\mathbf{q}$  ist nach dem Fourierschen Gesetz über den Wärmeleitkoeffizienten  $\kappa$  linear mit dem Temperaturgradienten  $\nabla T$  verknüpft:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T . \quad (3.27)$$

Der Cauchy'sche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  beschreibt die konstitutiven Beziehungen für ein Newtonsches Fluid und setzt sich unter Annahme der Stokes'schen-Hypothese aus dem viskosen Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{S})$  und dem thermodynamischen Druck  $p$  zusammen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I} = 2\mu \mathbf{S} - p \mathbf{I} , \quad (3.28)$$

wobei  $\mathbf{S}$  den spurenfreien Scherratentensor beschreibt:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}) . \quad (3.29)$$

Als Schließungsbedingung für das Gleichungssystem (3.25a) bis (3.25c) wird die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase herangezogen:

$$p = \rho R T . \quad (3.30)$$

Die spezielle Gaskonstante  $R$  ergibt sich aus den spezifischen Wärmekonstanten des Gases bei konstantem Druck  $c_p$  und konstantem Volumen  $c_v$ :

$$R = c_p - c_v = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} . \quad (3.31)$$

Ist  $c_v$  konstant, so gilt die Annahme für kalorisch ideales Gas, nach der die spezifische innere Energie  $e(\mathbf{x}, t)$  linear von der Temperatur  $T(\mathbf{x}, t)$  abhängt:

$$e = c_v T . \quad (3.32)$$

Aus Gleichung (3.26) und (3.30) bis (3.32) folgt somit der Zusammenhang

$$p = (\gamma - 1) \rho \left( E - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) . \quad (3.33)$$

Die dynamische Viskosität  $\mu(T)$  lässt sich über das Gesetz von Sutherland bestimmen:

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T_0 + S}{T + S} \right) \quad (3.34)$$

und anschließend die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  aus der Prandtlzahl  $Pr$  ermitteln:

$$\kappa = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr} . \quad (3.35)$$

In dieser Arbeit wird für das Gasgemisch Luft die Prandtlzahl  $Pr = 0,72$  und der Isentropenexponent  $\gamma = 1,4$  als konstant angenommen. Damit kann das Gesetz von Sutherland mit der Sutherland-Konstante  $S = 110,4 \text{ K}$  und den Referenzwerten  $T_0 = 273 \text{ K}$  und  $\mu_0 = 1,716 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  angewendet werden.

### Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen (3.25) beschreiben zwar alle wesentlichen physikalischen Phänomene turbulenter Strömungen, die direkte numerische Lösung der raum- und zeitdiskretisierten Gleichungen stellt jedoch sehr hohe Anforderungen an derzeitige Rechnerarchitekturen. Im Kontext der Grenzschichtuntersuchungen werden daher die turbulenten Schwankungsbewegungen auf Basis einer stochastischen Betrachtungsweise nach Reynolds [48] modelliert. Hierbei wird eine Zustandsgröße  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  in einen gemittelten Anteil  $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$  und eine Fluktuation  $\Phi'(\mathbf{x}, t)$  zerlegt:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' , \quad (3.36)$$

wobei das Ensemblemittel  $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$  aus  $N$  Messungen eines Zustands  $\Phi_i$  die Betrachtung instationärer Vorgänge erlaubt:

$$\bar{\Phi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_i . \quad (3.37)$$

Die Beschreibung kompressibler Strömungen erfordert zudem die Aufspaltung von  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  in einen massengewichteten Mittelwert  $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ , auch Favre-Mittelwert genannt, und eine daraus resultierende Fluktuation  $\Phi''(\mathbf{x}, t)$ :

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi'' \quad \text{mit} \quad \tilde{\Phi} = \frac{\overline{\rho\Phi}}{\bar{\rho}} . \quad (3.38)$$

Die Anwendung der Ansätze (3.36) bis (3.38) auf das Gleichungssystem (3.25) führt auf die RANS-Gleichungen, wobei nur die Mittelung der Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  und der Energie  $E$  nach Gleichung (3.38) massengewichtet werden. Die RANS-Gleichungen enthalten als Folge der Mittelung einen zusätzlichen Spannungsterm  $-\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$ , der den verstärkten Impulsaustausch durch turbulente Fluktuationen beschreibt. Diese sogenannten Reynoldsspannungen  $\boldsymbol{\tau}_t$  werden in der vorliegenden Arbeit auf Basis von Wirbelviskositätsmodellen approximiert. In Analogie zu molekularen Transportprozessen ergeben sich die Reynoldsspannungen nach dem Ansatz von Boussinesq aus einer linearen Beziehung zwischen dem gemittelten Scherratentensor  $\tilde{\mathbf{S}}$  und der Wirbelviskosität  $\mu_t$ :

$$\boldsymbol{\tau}_t = -\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} = 2\mu_t \left( \frac{1}{2} \left( \nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T \right) - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) - \frac{2}{3} \mathbf{I} \left( \bar{\rho} \tilde{k} \right) . \quad (3.39)$$

*Bemerkung 3.4:* Auf eine detaillierte Herleitung der Reynolds-Gleichungen wird in dieser Arbeit verzichtet und für weitere Ausführungen einschlägige Literatur, z.B. Schlichting [49], empfohlen. Der Vollständigkeit halber sind sowohl das resultierende Gleichungssystem als auch die zur Schließung jenes Gleichungssystems verwendeten Turbulenzmodelle in Anhang B aufgeführt. Hierbei wird auf validierte Implementierungen in dem für diese Arbeit zur Verfügung stehenden Tau-Verfahren [50] zurückgegriffen.

## Euler-Gleichungen

Unter Vernachlässigung der viskosen Spannungen  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ , d.h. im Kontext der kinetischen Gastheorie unter Vernachlässigung der Wärmeleitung  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ , entsprechen die Navier-Stokes-Gleichungen (3.25) den kompressiblen Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (3.40a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{0} , \quad (3.40b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = 0 . \quad (3.40c)$$

Es gelten weiterhin die Annahmen für kalorisch ideales Gas (vgl. Abschnitt 3.2.1), wodurch das obige Gleichungssystem (3.40) unter Einbeziehung der Zustandsgleichung (3.33) geschlossen lösbar ist.

### Linearisierte Potentialgleichung

Als weitere Vereinfachung sei von der Annahme ausgegangen, dass die Strömung isentrop und somit drehungsfrei sei:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (3.41)$$

Folglich lässt sich das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  über den Gradienten einer Potentialfunktion  $\phi(\mathbf{x}, t)$  beschreiben:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (3.42)$$

Durch diese Vereinfachung lassen sich nun die Euler-Gleichungen (3.40) in eine einzige partielle Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential  $\phi(\mathbf{x}, t)$  überführen:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \right] = 0. \quad (3.43)$$

Gleichung (3.43) entspricht der konvektiven, nichtlinearen Wellengleichung und drückt über das Geschwindigkeitspotential  $\phi(\mathbf{x}, t)$  die Ausbreitung einer Störung mit der Schallgeschwindigkeit  $a$  aus. Ferner sei für ebene Schalen  $|\partial w / \partial x| \ll 1$  und  $|\partial w / \partial y| \ll 1$  (vgl. Hypothese (H3) in Abschnitt 3.1.1). Diese Annahme rechtfertigt nach der Theorie infinitesimaler Störungen die Zerlegung des Geschwindigkeitspotentials  $\phi(\mathbf{x}, t)$  in einen Grundzustand  $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$  und einen Störanteil  $\phi'(\mathbf{x}, t)$ :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (3.44)$$

Für eine Grundströmung in  $x$ -Richtung ist  $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) \approx U_\infty x$ . Entsprechend gilt für die Störgeschwindigkeitskomponenten nach Gleichung (3.42):

$$u' = u - U_\infty = \frac{\partial \phi'}{\partial x} \ll 1; \quad v' = v = \frac{\partial \phi'}{\partial y} \ll 1; \quad w' = w = \frac{\partial \phi'}{\partial z} \ll 1. \quad (3.45)$$

Somit lässt sich der Vektor der Strömungsgeschwindigkeiten schreiben als:

$$\mathbf{v} = U_\infty \mathbf{e}_x + \nabla \phi'. \quad (3.46)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (3.46) in die nichtlineare Potentialgleichung (3.43) folgt unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung und der Annahme  $a \approx a_\infty$  [51, 198] die linearisierte Potentialgleichung für instationäre, kompressible Strömungen:

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{a_\infty^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi' = 0. \quad (3.47)$$

Die aus dem Störgeschwindigkeitspotential  $\phi'(\mathbf{x}, t)$  induzierte Druckverteilung  $p'(\mathbf{x}, t)$  lässt sich schließlich aus der Bernoulli-Gleichung ableiten:

$$p' = -\rho_\infty \left( \frac{\partial \phi'}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right). \quad (3.48)$$

### Generalisierte Kräfte ebener Schalen nach der linearisierten Potentialgleichung

Im Kontext der Fluid-Struktur-Interaktion ist die Bestimmung der aerodynamischen Lastverteilung  $\Delta p(\mathbf{x}, t) \equiv p'(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_k}$  über dem Kopplungsrand  $\Gamma_k$  erforderlich. Hierfür ist das Störgeschwindigkeitspotential  $\phi'$  nach Gleichung (3.47) unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen zu lösen, die sich für die ebene Schale wie folgt als Dirichlet-Randbedingung formulieren lassen:

$$\left. \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right|_{\Gamma} = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial w}{\partial x} & \Gamma = \Gamma_k \\ 0 & \Gamma \neq \Gamma_k \end{cases}. \quad (3.49)$$

Die Vernachlässigung jeglicher Wechselwirkungen mit den Randbereichen  $\Gamma \neq \Gamma_k$  ist im Kontext aeroelastischer Stabilitätsuntersuchungen aufgrund der infinitesimal kleinen Verformungsamplituden  $\hat{w} \rightarrow 0$  eine gerechtfertigte Vereinfachung, wie vergleichbare Betrachtungen gemischter Randwertprobleme von Cunningham [52] belegen.

Aus Gleichung (3.47) und (3.49) sowie der Sommerfeld'schen Strahlungsrandbedingung für  $z \rightarrow \infty$  lässt sich mithilfe einer Laplacetransformation in der Zeit  $t$  und einer Fouriertransformation in  $x$  und  $y$  die generalisierte Luftkraft  $Q_s(t)$  des  $s$ -ten modalen Freiheitsgrades über den Zusammenhang

$$Q_s(t) = \sum_r Q_{rs}(t) \quad (3.50)$$

und

$$Q_{rs}(t) = \iint \frac{\Delta p_r}{q_{\infty}} \psi_s \, dx \, dy \quad (3.51)$$

für eine ebene Schale in einer linearisierten Potentialströmung herleiten [53]:

$$Q_{rs}(t) = q_r(t)S_{rs} + \dot{q}_r(t)D_{rs} + \int_0^t [q_r(\sigma)H_{rs}(t-\sigma) + \dot{q}_r(\sigma)I_{rs}(t-\sigma)] \, d\sigma. \quad (3.52)$$

Darin ist  $\Delta p_r$  die durch die Verschiebung  $w(\mathbf{x}, t) = q_r(t)\psi_r(\mathbf{x})$  induzierte aerodynamische Lastverteilung und  $\sigma$  die retardierte Zeit. Die Koeffizienten  $S_{rs}$ ,  $D_{rs}$ ,  $H_{rs}$  und  $I_{rs}$  sind in Anhang X aufgeführt. Während  $S_{rs}$ ,  $D_{rs}$  lediglich von den Eigenschwingungsformen  $\psi_s$  der Struktur abhängen und somit analytisch lösbar sind, erfolgt die numerische Lösung der in  $H_{rs}$ ,  $I_{rs}$  und Gleichung (3.52) enthaltenen Integralterme über die Trapezregel [54].

### Quasistationäre Modellierung

Für  $M_{\infty} \gg 1$  lässt sich zeigen, dass der Integralterm in Gleichung (3.52) vernachlässigbar klein gegenüber den ersten beiden Termen wird [27]. Physikalisch bedeutet dies, dass Druckänderungen infolge lokaler Beschleunigungen oder Verzögerungen des Fluids vernachlässigt werden können. Gleichung (3.52) geht in diesem Fall in die quasistationäre *Piston*-Theorie nach Ashley [55] über:

$$\Delta p = \frac{2q_{\infty}}{M_{\infty}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_{\infty}} \frac{\partial w}{\partial t} \right). \quad (3.53)$$

Eine weitere quasistationäre Beschreibung von Überschallströmungen, die vielfach im Rahmen von Panelflatter-Studien Einsatz findet, ergibt sich aus der linearisierten Potential-

gleichung (3.47), indem für eine harmonisch oszillierende Überschallströmung ( $\phi' = \overline{\phi'} e^{i\omega t}$ ) eine Reihenentwicklung für die Frequenz  $\omega$  angesetzt und diese nach den ersten beiden Termen abgebrochen wird:

$$\Delta p = \frac{2q_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_\infty} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right). \quad (3.54)$$

Die Formulierungen (3.53) und (3.54) gehen für  $M_\infty \rightarrow \infty$  ineinander über. Interessant ist, dass der Dämpfungsterm in Gleichung (3.54) für  $M_\infty < \sqrt{2}$  das Vorzeichen wechselt und demzufolge unter Vernachlässigung der Strukturdämpfung aeroelastische Instabilitäten verantwortet. Daher ist dieser Ansatz für Stabilitätsanalysen im niedrigen Überschall nicht anwendbar. Untersuchungen haben indessen gezeigt, dass die Formulierungen nach Gleichung (3.53) und (3.54) für  $M_\infty > 1,7$  vergleichbare Lösungen zur linearisierten Potentialgleichung (3.47) liefern [52].

### 3.2.2 Diskretisierung mittels Finite-Volumen-Verfahren

Die numerische Lösung der RANS- (vgl. Abschnitt 3.2.1) und Euler-Gleichungen (3.40) erfolgt mithilfe eines Finite-Volumen-Verfahrens (FVV). Hierfür sind die aerodynamischen Grundgleichungen in die integrale Formulierung zu überführen. Dies gewährleistet bei physikalisch nichtlinearen Phänomenen, etwa bei Stoßvorgängen in der Strömung, die korrekte Bilanzierung von Masse, Impuls und Energie für ein finites Volumen  $\Omega$ . Die Navier-Stokes-Gleichungen (3.25) in der ALE-Formulierung lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{w} \, d\Omega = - \iint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (3.55)$$

Hierbei beschreibt der Vektor  $\mathbf{w}$  die konservativen Größen

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Der Flussdichtetensor  $\mathbf{F}$  lässt sich aus einem konvektiven (oder reibungsfreien) Anteil  $\mathbf{F}^{\text{konv}}$  und einem dissipativen (oder reibungsbehafteten) Anteil  $\mathbf{F}^{\text{diss}}$  zusammensetzen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{konv}} - \mathbf{F}^{\text{diss}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^{\text{konv}} = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_r) \\ \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_r) + p \mathbf{I} \\ \rho H(\mathbf{v} - \mathbf{v}_r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{\text{diss}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Anhang B listet die Reynolds- und Favre-gemittelten Komponenten des Gleichungssystems (3.55) auf. Unter Vernachlässigung des Schubspannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  entspricht Gleichung (3.55) den Euler-Gleichungen (3.40) in der integralen konservativen Form.

In dieser Arbeit wird das numerische Lösungsverfahren DLR-Tau (in der vorliegenden Arbeit als Tau-Verfahren bezeichnet) eingesetzt. Dieses approximiert die Lösung der raum- und zeitdiskreten Grundgleichungen basierend auf einem FVV. Die dafür implementierten Diskretisierungs- und Integrationsmethoden sind in Hinblick auf die Anforderungen dieser Arbeit hinreichend dokumentiert [56, 57], verifiziert und validiert [50, 58, 59]. Daher sei im Folgenden lediglich ein Überblick über die verwendeten Methoden gegeben.



### Räumliche Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung des Fluidgebietes  $\Omega$  basiert auf einer Unterteilung in nicht-überlappende Zellen eines unstrukturierten Primärnetzes, an dessen Randknoten die Erhaltungsgrößen  $\mathbf{w}$  gespeichert werden. Die geradlinige Verbindung der Zellschwerpunkte mit den Mittelpunkten der Zellränder bildet die Kontrollvolumina eines sekundären Netzes. Die semi-diskrete Form des Gleichungssystems (3.55) für ein finites Kontrollvolumen  $\Omega_i$  lautet:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w}_i \Omega_i) + \mathbf{R}(\mathbf{w}_i) = \mathbf{0} . \quad (3.58)$$

Das Residuum  $\mathbf{R}$  repräsentiert die konvektiven und dissipativen Flüsse über die Zellränder, die in dieser Arbeit primär über ein Zentrales-Differenzen-Schema approximiert werden. Jenes ist räumlich von zweiter Ordnung genau, weist jedoch numerische Instabilitäten auf [60]. Nach Jameson et al. [61] wird daher zusätzlich ein künstlicher Dissipationsterm berücksichtigt, der auf einer lokalen Adaption zwischen zweiten und vierten Differenzen basiert. Als Sensor für die Adaption dient hierbei das Druckfeld  $p(\mathbf{x}, t)$ , um etwa durch eine Reduktion der räumlichen Ordnung an Verdichtungsstößen numerische Oszillationen zu reduzieren.

Die für die Berechnung der dissipativen Flüsse benötigten räumlichen Gradienten einer Strömungsgröße ergeben sich aus den Mittelwerten der Gradienten benachbarter Zellen und werden je nach Anwendungsfall über ein Green-Gauss- oder Least-Squares-Schema rekonstruiert [56].

Im Kontext bewegter Rechnernetze ( $\mathbf{v}_r \neq 0$ ) wird das sogenannte Raumerhaltungsgesetz herangezogen (engl.: *Geometric Conservation Law*, GCL). Dieses wird ausführlich von Thomas und Lombard [62] beschrieben und fordert, dass ein numerisches Lösungsverfahren einen stationären Strömungszustand auch auf zeitveränderlichen Gebieten erhalten muss. Lesoinne und Farhat [63] zeigen für eine ebene Schale in einem transsonischen Strömungsfeld, dass bei aeroelastischen Simulationen im Zeitbereich eine Verletzung des GCL zu parasitären Oszillationen führen kann.

### Zeitliche Diskretisierung

Die numerische Integration der semi-diskreten Bewegungsgleichung (3.58) erfolgt über ein implizites Euler-Rückwärts-Verfahren zweiter Ordnung. Hierbei lassen sich die Zustandsgrößen  $\mathbf{w}_i$  zum gesuchten Zeitschritt  $n + 1$  wie folgt darstellen:

$$\frac{3}{2\Delta t}(\mathbf{w}_i \Omega_i)^{n+1} - \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{w}_i \Omega_i)^n + \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{w}_i \Omega_i)^{n-1} + \mathbf{R}(\mathbf{w}_i^{n+1}) = \mathbf{0} . \quad (3.59)$$

Der Term  $\mathbf{R}(\mathbf{w}_i^{n+1})$  führt dazu, dass Gleichung (3.59) nichtlinear ist. Nach dem sogenannten dualen Zeitschrittverfahren von Jameson [64] kann die Lösung jedoch zu jedem physikalischen Zeitschritt  $\Delta t$  als quasistationärer Zustand interpretiert und über eine fiktive Zeit  $\tau$  mit einem modifizierten Residuum  $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{w}_i)$  für  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^{n+1}$  bestimmt werden:

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{w}_i \Omega_i) + \underbrace{\left[ \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{w}_i \Omega_i^{n+1} - \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{w}_i \Omega_i)^n + \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{w}_i \Omega_i)^{n-1} + \mathbf{R}(\mathbf{w}_i) \right]}_{\mathbf{R}_\tau(\mathbf{w}_i)} = \mathbf{0} . \quad (3.60)$$

Der Vorteil des dualen Zeitschrittverfahrens besteht darin, nicht-zeitgenaue Integrations- und Konvergenzbeschleunigungsmethoden zur Lösung der Gleichung (3.60) einsetzen zu können. Neben einem expliziten, mehrstufigen Runge-Kutta-Verfahren [61] wird daher zur Konvergenzbeschleunigung ein von Dwight [65] implementiertes semi-implizites *Lower-Upper-Symmetric-Gauß-Seidel*-Schema verwendet. Dieses basiert auf den Arbeiten von Jameson und Turkel [66] und löst ein vereinfachtes, linearisiertes Gleichungssystem mit Hilfe eines symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahrens.

Das Tau-Verfahren stellt zudem weitere Methoden zur Konvergenzbeschleunigung bereit, zum Beispiel Mehrgitterverfahren oder die Methode der lokalen Zeitschritte [67]. Jene sind ausführlich in Referenz [56] dokumentiert und werden in dieser Arbeit je nach Problemstellung individuell eingesetzt.

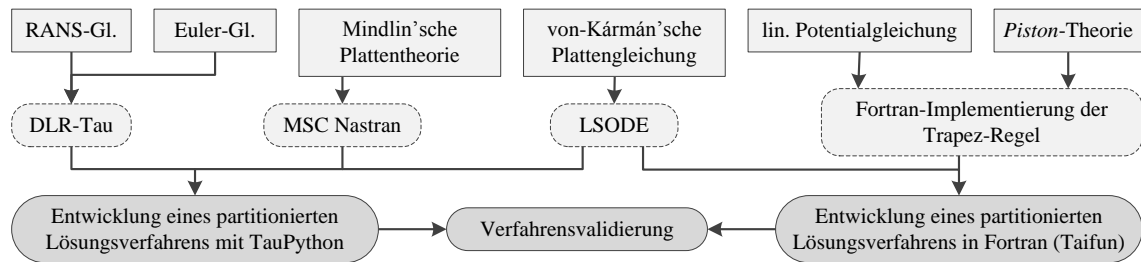
### Anfangs- und Randbedingungen

Als Anfangsbedingung wird der Zustand der ungestörten Anströmung  $\mathbf{v}_0$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  vorgegeben:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) . \quad (3.61)$$

Im Tau-Verfahren sind verschiedene Randbedingungen implementiert und validiert. So wird die Durchdringungsbedingung an festen Körperändern von der Gleitrandbedingung (d.h. die Stromlinien verlaufen tangential zum Rand;  $\mathbf{v}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) und der Haftrandbedingung (d.h. die Strömungsgeschwindigkeit am Rand ist Null;  $\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0$ ) erfüllt. Für ausführliche Erläuterungen zu den implementierten Körper- und Fernfeldrandbedingungen sei auf Galle [67] und die Verfahrensdokumentation [56] verwiesen.

## 4 Kopplung der Systemgleichungen und Verfahrensvalidierung



**Abbildung 4.1:** Übersicht zur Verfahrensentwicklung und -validierung.

Auf Grundlage der in Kapitel 2 identifizierten Modellanforderungen werden für die folgenden Untersuchungen zwei verschiedene Lösungsverfahren entwickelt und validiert. Zum einen handelt es sich hierbei um eine auf TAU-Python basierende Kopplung des Tau-Verfahrens mit der kommerziellen FEM-Software Nastran oder, alternativ, dem LSODE Algorithmus zur Lösung der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11). Abschnitt 4.2 stellt eine Erweiterung von TAU-Python um Schnittstellen für die genannten Struktur-lösungsverfahren vor. Dies erlaubt die Modellierung und Lösung komplexer Strömungs-Struktur-Wechselwirkungen für aeroelastische Detailstudien im Zeitbereich, stellt zugleich jedoch hohe Anforderung an die verfügbaren Rechenressourcen.

Daher wird zum anderen ein auf den Arbeiten von Ventres [44] basierendes Lösungsverfahren in Fortran entwickelt. Dieses basiert auf einer numerisch effizienten Lösung der linearisierten Potentialgleichung (3.47) und der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11), woraus sich im Vergleich zu TAU-Python deutlich geringere Lösungszeiten ergeben. Auf diese Weise lassen sich größere Parameterräume analysieren und interessante Parameterkombinationen für weiterführende Detailstudien identifizieren. Der ursprüngliche Algorithmus von Ventres [44] wurde hierzu um die Modellgleichung der gelenkig gelagerten ebenen Schale, einer Implementierung der *Piston*-Theorie sowie um diverse Ergebnisanalysemethoden erweitert. Das in Abschnitt 4.3 beschriebene Verfahren wird im Folgenden als Taifun bezeichnet.

Abbildung 4.1 stellt die gewählten Verfahren zur Kopplung der Systemgleichungen einander gegenüber. Einer Beschreibung der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung der Teilfelder in Abschnitt 4.4 folgt abschließend eine Validierung der Lösungsverfahren anhand repräsentativer Panelflatter-Problemstellungen in Abschnitt 4.5.

*Bemerkung 4.1:* Zur Unterscheidung der in Kapitel 3 eingeführten Systemgleichungen werden die Variablen des Strömungs- und Strukturfeldes in den weiteren Ausführungen respektive über die Exponenten  $(\cdot)^f$  und  $(\cdot)^s$  gekennzeichnet.

## 4.1 Grundlagen partitionierter Lösungsansätze

Im Gegensatz zu simultanen Lösungsansätzen, bei denen die Interaktion zwischen Strömung und Struktur über einen monolithischen Modellierungsansatz formuliert und gelöst wird [31], liegt dem partitionierten Ansatz die Idee zugrunde, den Lösungsraum basierend auf dessen physikalischen Eigenschaften in räumlich getrennte Felder zu unterteilen, separat zu lösen und anschließend über eine geeignete Kopplungsstrategie die aeroelastische Systemantwort zu ermitteln. Die Vorteile dieser Methode werden ausführlich von Mok [31] diskutiert und lassen sich in Bezug auf die vorliegende Arbeit wie folgt zusammenfassen:

- **Unabhängige Modellierung, Diskretisierung und Lösung:** Aus Kapitel 2.5 geht hervor, dass sich die Modellgleichungen der Strömungs- und Strukturfelder sowohl in ihrer Formulierung (Euler'sche, Lagrange- oder ALE-Betrachtungsweise) als auch in der algorithmischen Behandlung ihrer Diskretisierungs- und Lösungsansätze (z.B. FEM, FVV) unterscheiden. Dies vereinfacht den Einsatz der in Abschnitt 2.5 vorgestellten Modellgleichungen und Lösungsverfahren.
- **Software-Modularität:** Die modulare Integration verschiedener Lösungsverfahren ermöglicht in dieser Arbeit u.a. den Einsatz der kommerziellen Software Nastran, die insbesondere in Hinblick auf den verwendeten SOL400-Algorithmus nur einen stark eingeschränkten Zugriff auf den zugrundeliegenden Programmcode erlaubt. Weiterhin können mit geringem Programmieraufwand verschiedene Versionen einer Software in den Lösungsprozess integriert werden, wodurch z.B. Weiterentwicklungen des Tau-Verfahrens kontinuierlich in diese Arbeit einfließen konnten.
- **Problemgröße:** Die Unterteilung in Teilfelder reduziert die Größe der zu lösenden Gleichungssysteme.
- **Kondition der Koeffizientenmatrizen:** Da die Koeffizientenmatrizen der Teilfelder im Regelfall eine voneinander stark abweichende Größe aufweisen, kann der Einsatz eines simultanen Lösungsansatzes zu einem schlecht konditionierten Gesamtgleichungssystem führen. Dies wird beim Einsatz partitionierter Ansätze vermieden.

In dieser Arbeit wird die Klasse nicht-überlappender partitionierter Dirichlet-Neumann-Gebietszerlegungsmethoden herangezogen, zu denen

- einfach gestaffelte, schwach koppelnde, explizite Verfahren
- iterativ gestaffelte, stark koppelnde, implizite Verfahren

zählen. Abbildung 4.2 stellt letztgenanntes Verfahren schematisch dar. Die Lösungen der Teilfelder basieren auf identischen (synchronen) Zeitintervallen  $[t_n, t_{n+1}]$  und werden nacheinander (sequentiell) ermittelt. Der implizite Charakter des Verfahrens ergibt sich, indem einem Prädiktorschritt ( $2^{\text{pre}}$ ) des Strukturfeldes zusätzliche Korrektorschritte ( $6^{\text{kor}}, 10^{\text{kor}}, \dots$ ) folgen. Somit stehen dem Strömungs- ( $\Omega^f$ ) und dem Strukturfeld ( $\Omega^s$ ) jeweils die Kopplungsinformationen, in diesem Fall aerodynamische Lasten  $\mathbf{f}^f$  und Verformungen  $\mathbf{u}^s$ , zu Beginn und am Ende des Zeitintervalls zur Verfügung. Dies wirkt sich positiv auf die Stabilität des Verfahrens aus, wie Gordnier und Visbal in Bezug auf die Anwendbarkeit partitionierter Lösungsansätze für Panelflatter-Problemstellungen nachweisen [68]. Unter Vernachlässigung der Korrektorschritte entspricht das Lösungsschema folglich einem einfach gestaffelten, expliziten Verfahren und stellt damit höhere Anforderungen an die Wahl der zulässigen Zeitschrittweite.

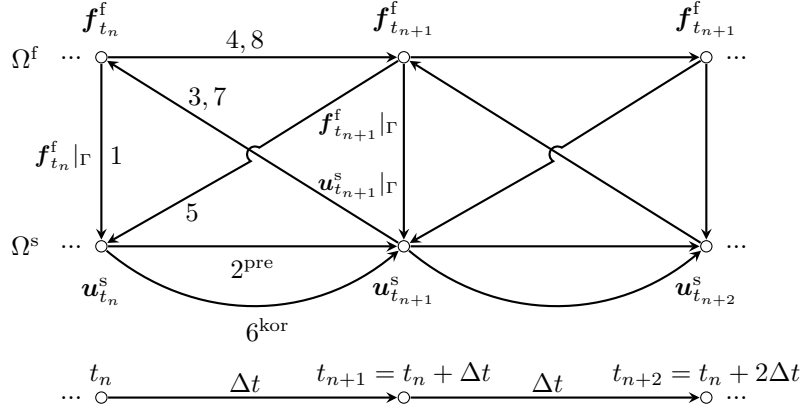


Abbildung 4.2: Seriell gestaffeltes Kopplungsschema mit Subiterationen.

## 4.2 Numerische Implementierung mit TAU-Python

TAU-Python beschreibt eine Sammlung von Modulen, die primär zur Steuerung des Tau-Verfahrens entwickelt und dem Nutzer in der Programmiersprache Python zur Verfügung gestellt werden. Für die vorliegende Arbeit konnte neben den Schnittstellen für das Tau-Verfahren ebenfalls auf Module zur Interpolation von Daten zwischen verschiedenen Rechengittern („Mesh2Mesh“) und zur Volumennetzdeformation zurückgegriffen werden. TAU-Python wurde in dieser Arbeit um Schnittstellen für die Lösungsverfahren Nastran und LSODE erweitert. Einem objektorientierten Ansatz folgend wurden dazu Python-Klassen entwickelt, welche die einzelnen Lösungsverfahren und die dazugehörigen Prä- und Postprozessoren modular zusammenfassen. Dies ermöglicht die Implementierung des in Abbildung 4.2 dargestellten stark koppelnden Lösungsverfahrens. Im Folgenden seien die einzelnen Prozessschritte näher erläutert.

- **Schritt 1:** Interpolation der aerodynamischen Lasten

Da für die Modellierung des Strömungs- ( $\Omega^f$ ) und Strukturfeldes ( $\Omega^s$ ) unterschiedliche Rechnetze verwendet werden, ist eine Interpolation der aerodynamischen Lasten am Kopplungsrand  $\Gamma \equiv \Gamma_k$ , also an der benetzten Strukturoberfläche, erforderlich. Hierbei ist die dynamische Kontinuitätsbedingung zu erfüllen, welche die Erhaltung des dynamischen Gleichgewichts aller Kräfte am Kopplungsrand fordert.

Der konservative Lasttransfer zwischen den Teilfeldern wird durch die Wahl einer *nearest-neighbor*-Interpolation gewährleistet. Dazu wird der Kraftvektor  $\mathbf{f}_{i,t_n}^f|_\Gamma$  eines Netzpunktes  $i$  des Strömungsrechnernetzes dem nächstgelegenen Netzpunkt  $j$  des Strukturrechnernetzes aufgeprägt, d.h.  $\mathbf{f}_{i,t_n}^f|_\Gamma \rightarrow \mathbf{f}_{j,t_n}^s|_\Gamma$ . Zusätzlich wird aus dem Abstandsvektor  $\mathbf{d}_{ij}$  zwischen den Netzpunkten  $i$  und  $j$  ein entsprechendes Versatzmoment  $\mathbf{f}_{i,t_n}^f|_\Gamma \times \mathbf{d}_{ij}$  gebildet.

Die in dieser Arbeit verwendete Implementierung des Interpolationsverfahrens in TAU-Python wird von Heinrich in [69] vorgestellt und anhand numerischer Untersuchungen der statisch-aeroelastischen Verformung eines generischen Tragflügels in transsonischer Strömung validiert. Darüber hinaus sei auf weitere Validierungsstudien von Spiering et al. [70] verwiesen.

Für  $t_n = t_0$  entfällt Schritt 1, da zu Beginn einer neuen Rechnung noch keine Strömungslösung aus einem vorherigen Zeitschritt zur Verfügung steht.

- **Schritt 2:** Lösung des Strukturfeldes  $\Omega^s$

Die Berechnung der zeitabhängigen Strukturdeformationen erfolgt wahlweise über die numerischen Lösungsverfahren Nastran oder LSODE und somit entsprechend den Ansätzen der Mindlin'schen Plattentheorie (siehe Anfangsrandwertproblem (3.2) bis (3.7) und Hypothesen (H1) bis (H5) in Abschnitt 3.1.1), bzw. denen der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11). Eine ausführliche Beschreibung jener Verfahren ist in Abschnitt 3.1 gegeben.

Indem basierend auf den Lasten eines konvergierten Zeitschrittes  $\mathbf{f}_{t_n}^s|_\Gamma$  die strukturdynamische Antwort des folgenden Zeitschrittes  $\mathbf{u}_{t_{n+1}}^s|_\Gamma$  approximiert wird, entspricht Schritt 2 einem physikalischen Prädiktorschritt. Entfällt zu Beginn einer neuen Rechnung ( $t_n = t_0$ ) Schritt 1, so ist  $\mathbf{f}_{t_0}^s|_\Gamma = \mathbf{0}$ . Eine erste Abschätzung des Verformungs- und Geschwindigkeitsfeldes zum Zeitpunkt  $t_1$  basiert daher auf dem Schwingungsverhalten der Struktur im Vakuum.

- **Schritt 3:** Interpolation der Strukturdeformation und Netzdeformation

Zunächst werden in Schritt 3 die Verformungen des Kopplungsrandes  $\Gamma$  auf das Rechnetz des Strömungsfeldes interpoliert, d.h.  $\mathbf{u}_{t_{n+1}}^s|_\Gamma \rightarrow \mathbf{u}_{t_n}^f|_\Gamma$ . Dabei ist die kinematische Kontinuitätsbedingung zu erfüllen, wonach die kinematischen Größen, wie Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, am Kopplungsrand für beide Teilfelder stets übereinstimmen müssen. Zu diesem Zweck wird ein sogenanntes *scattered-data*-Interpolationsverfahren auf der Grundlage radialer Basisfunktionen [71] (RBF) verwendet, dessen theoretische Grundlagen ausführlich von Buhmann [72] und Wendland [73] erläutert werden. Neumann [74] untersucht in diesem Zusammenhang den Einfluss verschiedener Basisfunktionen auf die resultierenden Interpolationsfehler am Beispiel einer einseitig eingespannten ebenen Schale und quantifiziert diese über einen Vergleich des interpolierten Verschiebungsfeldes mit einer analytisch vorgegebenen Verschiebungsfunktion. Auf Basis dieser Ergebnisse wird in der vorliegenden Arbeit eine sogenannte *volume-spline*-Funktion als radiale Basisfunktion gewählt. Hierbei kann auf eine validierte Implementierung des Interpolationsalgorithmus im Tau-Verfahren zurückgegriffen werden [69].

Anschließend muss das Rechnetz des Strömungsfeldes  $\Omega^f$  über einen Deformationsansatz dem Kopplungsrand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  nachgeführt werden. Hierbei kommt ebenfalls ein RBF-basierter Interpolationsansatz zum Einsatz. Aufgrund der Netzunabhängigkeit (d.h. die Konnektivität der Netzknoten untereinander wird nicht benötigt) [75] und der hohen Ergebnisgüte [76] findet dieser Ansatz vielfach in Problemstellungen der numerischen Strömungs-Struktur-Interaktion Anwendung [77–79]. Die vorab bestimmten Deformationen des Kopplungsrandes  $\mathbf{u}_{t_n}^f|_\Gamma$  dienen nun als Eingangsdaten, mittels derer die Verschiebungen der Netzknoten im dreidimensionalen Raum über eine *volume-spline*-Funktion interpoliert werden. Mit der Zunahme des euklidischen Abstands zwischen den Netzknoten und dem Kopplungsrand nimmt die Verformung stetig ab, wobei der Einflussradius so gewählt wird, dass die Geometrie der dem Kopplungsrand gegenüberliegenden Ränder des Strömungsfeldes  $\Omega^f$  nicht beeinflusst wird. Im Rahmen dieser Arbeit steht eine validierte Implementierung des Verfahrens als Tau-Modul zur Verfügung [69, 80], die auf Arbeiten von Gerhold basiert [81].

- **Schritt 4:** Lösung des Strömungsfeldes  $\Omega^f$

Zur Berechnung des instationären Strömungsfeldes  $\Omega^f$  kommt das Tau-Verfahren zum Einsatz, mit dem die RANS-Gleichungen (B.1) und Euler-Gleichungen (3.40) numerisch gelöst werden. In diesem Kontext sei auf eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens in Abschnitt 3.2 verwiesen. Aus der Lösung lassen sich die aerodynamischen Lasten  $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^f|_\Gamma$  am Kopplungsrand  $\Gamma$  ableiten.

- **Schritt 5 und Folgende:** Wiederholung der Schritte 1 bis 4

Innerhalb eines Zeitschrittes werden die Schritte 1 bis 4 wiederholt, um dem stark koppelnden impliziten Charakter des Verfahrens zu entsprechen. Diese inneren Iterationen  $i$  (auch als Korrektorschritte  $(\cdot)^{\text{kor}}$  bezeichnet) werden solange ausgeführt, bis ein vorgegebenes Konvergenzkriterium erfüllt ist. Jenes fordert, dass die Verformung des Kopplungsrandes  $\mathbf{u}_{t_{n+1}}^f|_\Gamma$  vernachlässigbar klein im Vergleich zum vorangegangenen Iterationsschritt  $i - 1$  ist:

$$\frac{\|\mathbf{u}_{t_{n+1},i}^s|_\Gamma - \mathbf{u}_{t_{n+1},i-1}^s|_\Gamma\|}{\|\mathbf{u}_{t_{n+1},i-1}^s|_\Gamma\|} \leq \epsilon. \quad (4.1)$$

Für die in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen wird  $\epsilon = 10^{-8}$  gewählt, wozu in der Regel zwei bis vier innere Iterationen erforderlich sind. Die Lösung dient anschließend als Startlösung für die Berechnung des nächsten Zeitschrittes.

### 4.3 Numerische Implementierung mit Fortran

Das Lösungsverfahren Taifun basiert auf einer Implementierung des einfach gestaffelten Kopplungsschemas in Fortran. Die Modellgleichungen des Struktur- und Strömungsfeldes werden in generalisierten (modalen) Freiheitsgraden formuliert, wodurch sich die Anzahl der Systemfreiheitsgrade drastisch reduzieren lässt und somit den hohen Anforderungen an die zeitliche Diskretisierung entsprochen werden kann. Abbildung 4.3 gibt den Prozessablauf von Taifun schematisch wieder.

Zunächst werden über eine Textdatei die vorgegebenen Anfangs- und Randwerte in dimensionsloser oder dimensionsbehafteter Form eingelesen. Aus diesen wird anschließend die Startlösung initialisiert, wobei in der Regel die zeitliche Ableitung des ersten modalen Freiheitsgrades auf einen Wert ungleich Null gesetzt wird ( $\dot{q}_1 \neq 0$ , vgl. Abschnitt 3.1.3). Der Algorithmus basiert hierbei auf der dimensionslosen Zeit  $\tau$  nach Gleichung (2.24). Die aerodynamischen Übertragungsfunktionen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{I}$  sind nach Gleichungen (A.10) bis (A.14) lediglich einmal im Vorfeld zu bestimmen, wobei die in  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{I}$  auftretenden Integralterme über eine Trapezregel [54] approximiert werden. Dowell zeigt in diesem Zusammenhang, dass in supersonischen Strömungen die aerodynamischen Übertragungsfunktionen im Zeitbereich für  $\tau > M_\infty/(M_\infty - 1)$  gegen Null streben [53]. Aus physikalischer Sicht bedeutet dies, dass weiter zurückliegende Ereignisse keinen Einfluss mehr auf die Lösung zum aktuellen Zeitpunkt haben. Daher genügt es, die Übertragungsfunktionen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{I}$  lediglich für die Zeitspanne  $\Delta\tau = M_\infty/(M_\infty - 1)$  zu berechnen (in der englischen Literatur wird hierfür häufig die Bezeichnung *memory-effect* verwendet [53]).

Die Bestimmung der generalisierten Luftkräfte  $Q_{rs}$  erfolgt nach Gleichung (3.52) für jeden Freiheitsgrad wieder über eine numerische Integration mit der Trapezregel [54]. Werden dabei die Übertragungsfunktionen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{I}$  vernachlässigt, entspricht die aerodynamische Mo-



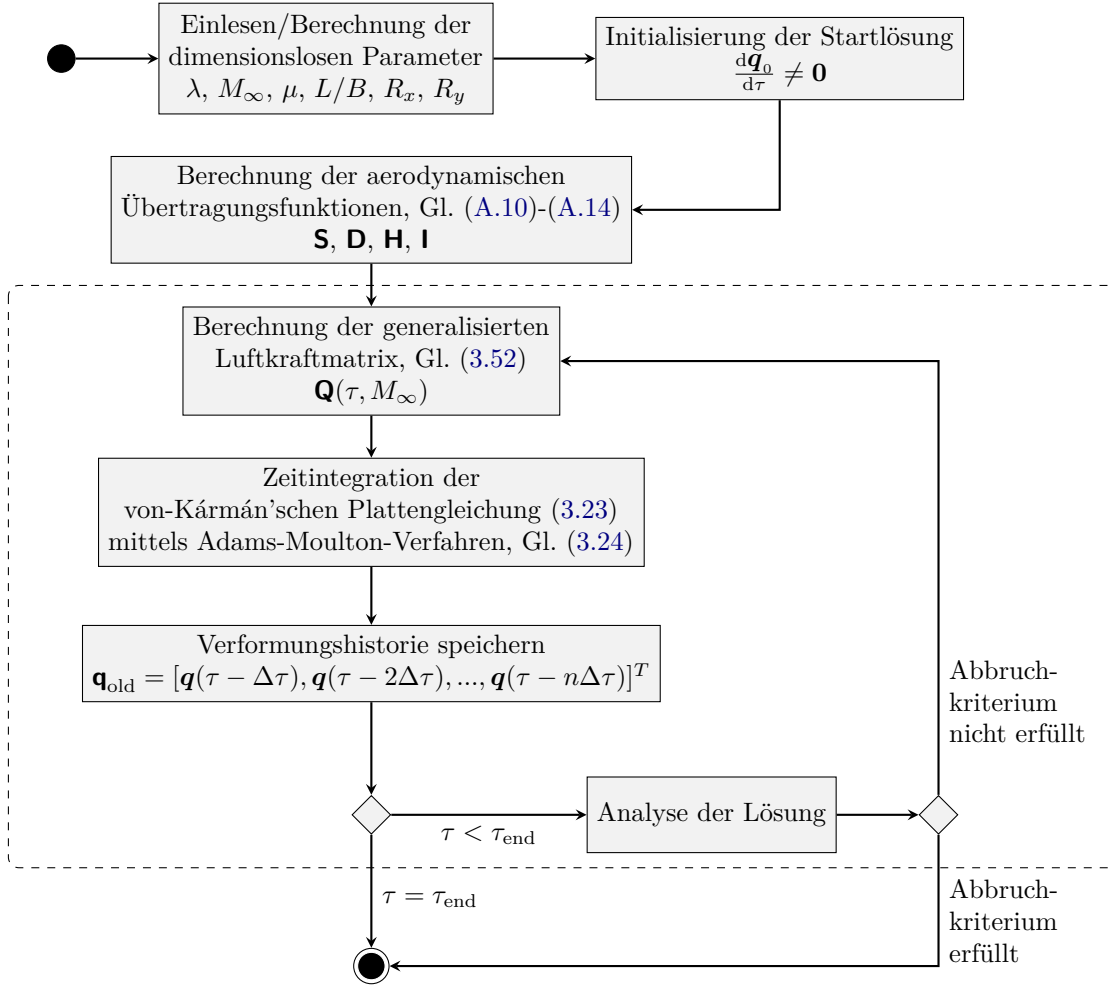
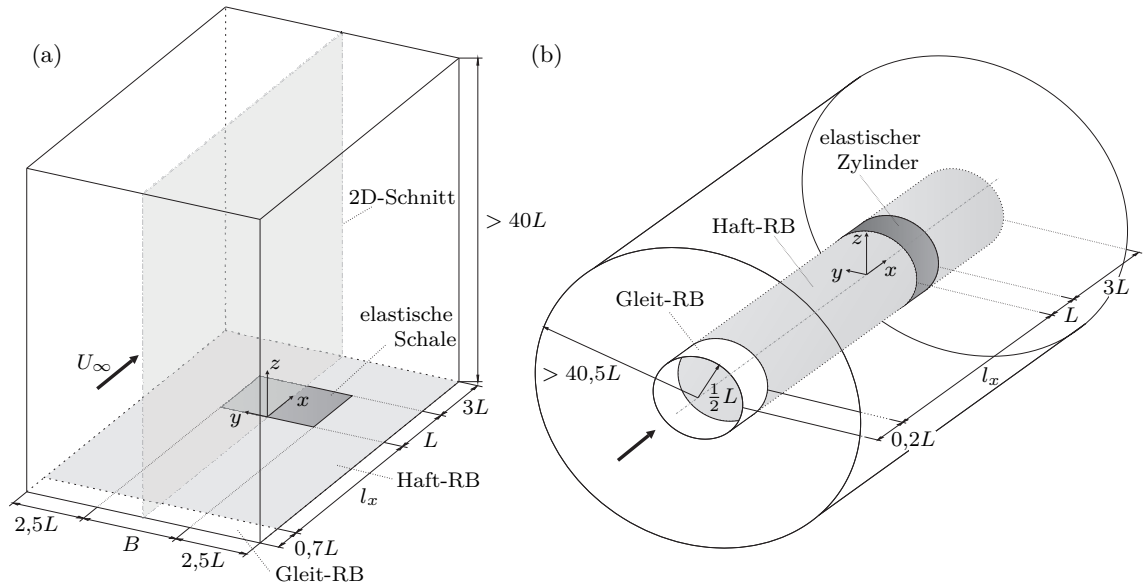


Abbildung 4.3: Ablaufdiagramm des Lösungsprozesses in Taifun.

dellgleichung jener der *Piston*-Theorie (vgl. Abschnitt 3.2.1). Anschließend werden die Lösungen in einer generalisierten Luftkraftmatrix  $\mathbf{Q}$  zusammengefasst. Die von-Kármán'sche Plattengleichung (3.11), die bereits in Abschnitt 3.1.3 mithilfe des Galerkin-Verfahrens in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführt wurde, lässt sich nun mit dem in Abschnitt 3.1.3 vorgestellten Adams-Moulton-Verfahren für eine finite Anzahl modaler Freiheitsgrade in der Zeit  $\tau$  integrieren. Hierbei kann wahlweise auf die in dieser Arbeit primär verwendete Formulierung für gelenkig gelagerte Schalen nach Gleichung (3.23) oder auf die Implementierung von Ventres [44] für fest eingespannte Schalen zurückgegriffen werden. Zur Approximation der in Gleichung (3.52) enthaltenen Integralterme werden die Ergebnisse des aktuellen Zeitschritts der Verformungshistorie  $\mathbf{q}_{\text{old}}$  hinzugefügt und über eine Zeitspanne von  $\Delta\tau = M_\infty/(M_\infty - 1)$  im flüchtigen Speicher gehalten.

Wenn die vorgegebene physikalische Abbruchzeit  $\tau_{\text{end}}$  noch nicht erreicht ist, wird die Lösung zum jeweils aktuellen Zeitpunkt auf weitere Abbruchkriterien überprüft. Hierfür werden zum Beispiel zeitabhängige Schwingungsmaxima  $\hat{w}(\xi, \tau)$  ermittelt, anhand derer sich eine etwaige Dämpfung oder Anfachung identifizieren lässt. Ist ein derartiges Abbruchkriterium nicht erfüllt, beginnt der Kopplungszyklus von Neuem für den folgenden Zeitschritt  $\tau_{i+1}$ .





**Abbildung 4.4:** Rechendomänen der ebenen (links) und der kreiszyklindrischen Schale (rechts).

## 4.4 Diskretisierung des gekoppelten Systems

In Abschnitt 4.1 wurde die Sensitivität des aeroelastischen Gesamtsystems auf die Zeitschrittweite  $\Delta\tau$  hervorgehoben. Folglich ist sicherzustellen, dass sowohl die Lösungen der physikalischen Teilfelder als auch die gekoppelte Lösung unabhängig von ihrer zeitlichen und räumlichen Diskretisierung sind. Der folgende Abschnitt dokumentiert in diesem Kontext die Modellierung des Strömungs- und Strukturfeldes und bewertet die resultierenden Diskretisierungsfehler anhand des sogenannten *grid-convergence-index* (GCI).

### 4.4.1 Netztopologie und Randbedingungen

Abbildung 4.4 zeigt schematisch die Rechendomänen der ebenen Schale und der Kreiszyklinderschale, wobei der Fokus zunächst auf Erstgenannter liegt. Hashimoto et al. [15] verwenden eine topologisch vergleichbare Rechendomäne, um die experimentellen Ergebnisse von Muhlstein et al. [9] numerisch zu reproduzieren. Da die vorliegende Arbeit thematisch an jene Studien angelehnt ist, sei die rechtwinklige Schale mit einem Streckungsverhältnis von  $L/B = 0,5$  exemplarisch für die folgende Beschreibung der Netztopologie und der Analyse des Diskretisierungsfehlers herangezogen. Im Verlauf der Arbeit werden die Geometrien der Rechnetze den jeweiligen Problemstellungen angepasst, dabei jedoch stets nach derselben Methodik einer Netzkonvergenzstudie unterzogen.

Die geometrischen Randbedingungen nach Gleichung (3.13) beschreiben wahlweise eine allseitig gelenkig gelagerte oder fest eingespannte ebene Schale. Im Fall von Nastran ist diese über QUAD4-Elemente diskretisiert. Bei der Verwendung des LSODE werden ohne eine explizite Analyse des räumlichen Diskretisierungsfehlers die 12 niedrigsten Eigenschwingungsformen berücksichtigt, da der limitierende Faktor aus der zeitlichen Auflösung der hohen Eigenfrequenzen resultiert.

Abbildung 4.4(a) zeigt die Geometrie und die numerischen Randbedingungen des diskretisierten Strömungsfeldes. Die unteren Ränder beschreiben eine adiabate Wand, die den Randbereich und den verformbaren Kopplungsrand einschließt. Bei der Lösung der RANS-Gleichungen beziehen sich die Angaben der Grenzschichtdicke  $\delta$  auf den Mittelpunkt der unverformten Schale ( $\xi = 0,5$ ) und werden in Analogie zu Literaturquellen, die an späterer Stelle für eine Verfahrensvalidierung herangezogen werden, über den Abstand eines Punktes mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit  $U(z) = 0,99U_\infty$  zur unverformten Wand  $z = 0$  definiert. Da sich die Grenzschicht über die Länge  $l_x$  ausbildet, lässt sich die Dicke  $\delta$  über eine Variation von  $l_x$  justieren.

*Bemerkung 4.2:* Die in der Literatur übliche Indizierung der Grenzschichtdicke  $\delta_{99}$  wird in dieser Arbeit nicht verwendet, um Verwechslungen mit der in Kapitel 6 gewählten Kennzeichnung der Dicke  $\delta_n$  diskreter wandparalleler Fluidschichten  $n$  zu vermeiden.

Für die Modellierung reibungsfreier Strömungen (Lösung der Euler-Gleichungen (3.40)) wird die Hafttrandbedingung durch eine Gleitrandbedingung ersetzt. Werden keine Querstromkomponenten zugelassen, entsprechen die aerodynamischen Lasten jenen einer zweidimensionalen Lösung. Zur Bestimmung der aerodynamischen Kraftkomponenten  $\mathbf{f}^f|_\Gamma$  wird die gemittelte Druckverteilung des stationären Grundzustandes über dem Kopplungsrand als zeitlich konstanter Gegendruck auf der Schalenrückseite (Kavität) vorgegeben. Der Abstand der Schale zu den oberen Rändern des Fernfeldes ist groß genug, um in diesem Bereich lokale Strömungsgradienten und somit etwaige Rückwirkungen auf den Kopplungsrand zu vermeiden. Sowohl am oberen Rand als auch am Einströmrand werden die freien Anströmbedingungen vorgegeben, während eine Extrapolation erster Ordnung am Ausströmrand definiert wird. Die seitlichen Begrenzungen des Strömungsfeldes werden über eine Gleitrandbedingung beschrieben, da bei der Präsenz einer Wandgrenzschicht lokale Geschwindigkeitsgradienten in der  $x$ - $z$ -Ebene auftreten. Das Strömungsfeld ist durch hexaederförmige finite Volumen diskretisiert, die den wandnahen Bereich, den Übergang von der Gleit- zur Hafttrandbedingung sowie die Randbereiche des Kopplungsrandes am höchsten auflösen und in den verbleibenden Richtungen in ihrer Größe zunehmen. Das Größenverhältnis benachbarter Elemente ist dabei auf einen Maximalwert von 1,2 begrenzt. Bei zweidimensionalen (2D) Strömungsfeldern entspricht die Netztopologie in der  $x$ - $z$ -Ebene jener aus den dreidimensionalen (3D) Untersuchungen (vgl. Abbildung 4.4), jedoch wird die Querstromrichtung lediglich über eine Zelle diskretisiert. Die Gesamtanzahl der Zellen wird im Folgenden über eine Konvergenzstudie bestimmt. In allen Fällen ist die Höhe der wandnächsten Zelle so gewählt, dass im Bereich des Kopplungsrandes ein dimensionsloser Wandabstand von  $y^+ \approx 0,5$  erzielt wird.

Die Netztopologie und die Wahl der Randbedingungen zur Modellierung der Kreiszylinderschale unterscheiden sich von der ebenen Schale lediglich durch die Krümmung in Querstromrichtung (vgl. Abbildung 4.4(b)). Zur Bestimmung der Strukturverformungen wird zudem ausschließlich Nastran verwendet.

#### 4.4.2 Analyse der Diskretisierungsfehler

Zur systematischen Abschätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers wird im Rahmen einer Netzkonvergenzstudie zunächst eine Richardson-Extrapolation herangezogen. Nach diesem Verfahren lässt sich aus zwei Lösungen  $f_i$  und  $f_j$ , die respektive auf Rechnernetzen

mit verschiedenen Netzfeinheiten  $h_i$  (fein) und  $h_j$  (grob) bestimmt wurden, die Kontinuumslösung  $f_{\text{kont}}$  extrapolieren. Für ein Verfahren  $p$ -ter Ordnung und einem Netzverfeinerungsfaktor von  $r = h_j/h_i$  ergibt sich  $f_{\text{kont}}$  aus:

$$f_{\text{kont}} \cong f_i + \frac{f_i - f_j}{r^p - 1}. \quad (4.2)$$

Zur quantitativen Fehlerabschätzung dient in den folgenden Untersuchungen die Abweichung einer Lösung  $f_i(h)$  vom asymptotischen Grenzwert  $f_{\text{kont}}$ , der im Fall mehrerer Rechenetze über die zwei höchsten Netzauflösungen ermittelt wird. Die prozentuale Abweichung  $\epsilon_f$  ergibt sich anschließend aus:

$$\epsilon_f = \frac{|f_i - f_{\text{kont}}|}{|f_{\text{kont}}|} \cdot 100 \% . \quad (4.3)$$

Basierend auf der Richardson-Extrapolation schlägt Roache [82] für CFD-Studien zudem einen weiteren Fehlerkennwert vor, der sich unter Berücksichtigung eines Sicherheitsfaktors  $F_s$  auf die relative Abweichung zweier Lösungen  $f_i$  und  $f_j$  voneinander bezieht und somit eine Aussage darüber liefert, in welchem Maße sich die Lösung bei einer weiteren Verfeinerung der Netzauflösung ändert. Der GCI ergibt sich demnach aus:

$$\text{GCI}_{ij} = \frac{F_s |\epsilon_{ij}|}{r^p - 1} \quad \text{mit} \quad \epsilon_{ij} = \frac{f_j - f_i}{f_i} \cdot 100 \% . \quad (4.4)$$

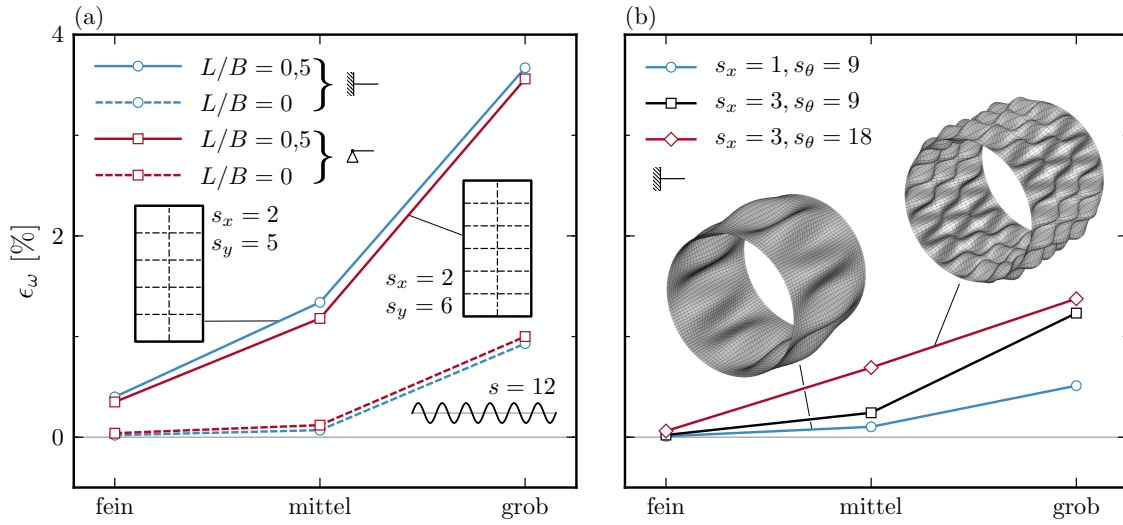
Hierbei wird der Sicherheitsfaktor  $F_s$  gemäß einer Empfehlung von Roache [82] mit  $F_s = 3$  angegeben. Somit lassen sich die Ergebnisse trotz schwer zu quantifizierender Einflussfaktoren, etwa der Turbulenzmodellierung, hoher Zellstreckungen oder stark nichtlinearer Phänomene, als konservativ einstufen [82]. Basierend auf Netzkonvergenzstudien von Rakowitz [83] mit dem Tau-Verfahren wird die Ordnung  $p$  zudem mit einem konservativen Wert von  $p = 1,75$  vorgegeben.

Die Fehlerkennwerte nach Gleichung (4.3) und (4.4) lassen sich ebenso zur Quantifizierung des zeitlichen Diskretisierungsfehlers heranziehen, indem über den unabhängigen Parameter  $h$  die physikalische Zeitschrittweite  $\Delta\tau$  beschrieben wird. Da es sich ansonsten um das identische Verfahren handelt, sei die Bezeichnung GCI auch für die Zeitkonvergenzstudien verwendet. Sobald der  $\text{GCI} \leq 3\%$  ist, wird die Abhängigkeit der Lösung von der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung als hinreichend gering angesehen.

### Netzkonvergenz des Strukturfeldes

Zunächst sei die Richardson-Extrapolation nach Gleichung (4.2) zur Quantifizierung des räumlichen Diskretisierungsfehlers der Strukturmodelle herangezogen. Hierzu sei die Frequenz ausgewählter Eigenschwingungsformen der ebenen Schale und der Kreiszylinderschale betrachtet. Die Lösungen werden für verschiedene Netzauflösungen mithilfe des verwendeten Lösungsalgorithmus SOL400 von Nastran im Frequenzbereich bestimmt.

Das Rechenetz der ebenen Schale wird über die Seiten  $L$  und  $B$  mit respektive  $13 \times 25$  (grob),  $26 \times 50$  (mittel) und  $52 \times 100$  (fein) QUAD4-Elementen diskretisiert. Für die untersten 12 Eigenschwingungsformen fasst Abbildung 4.5(a) die größten Abweichungen der Eigenkreisfrequenz  $\epsilon_\omega$  nach Gleichung (4.3) zusammen. Hierbei wird zwischen der ein- und zweidimensionalen Konfiguration mit jeweils allseitig gelenkiger oder fest eingespannter Lagerung unterschieden. Erwartungsgemäß zeigt sich, dass die Diskretisierungsfehler



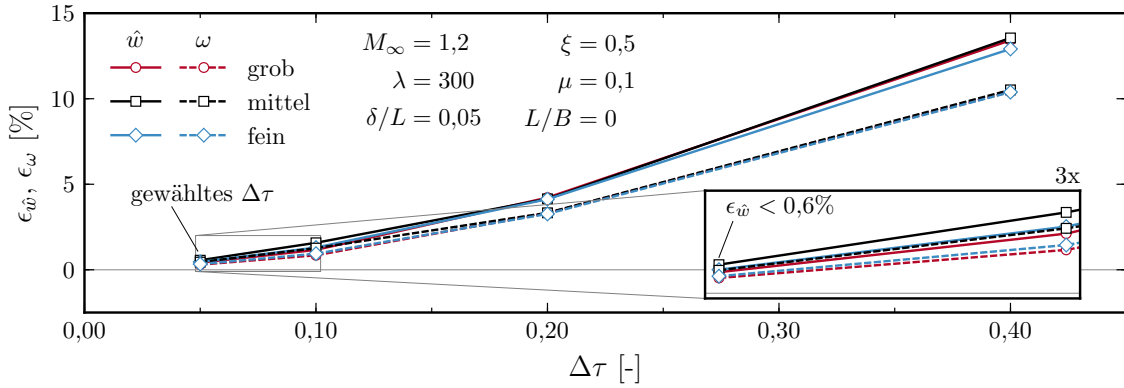
**Abbildung 4.5:** Einfluss der räumlichen Diskretisierung auf die Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  ebener und zylindrischer Schalen.

der zweidimensionalen Konfigurationen deutlich über jene der eindimensionalen Konfigurationen liegen. Mit einer prozentualen Abweichung von  $\epsilon_\omega < 1,4\%$  wird das Rechnetz mit der mittleren Auflösung für die Anwendungsfälle der vorliegenden Arbeit als geeignet angesehen. Zwar legen die Ergebnisse nahe, dass insbesondere die eindimensionalen Konfigurationen aus strukturdynamischer Sicht mit einer räumlich größeren Auflösung diskretisiert werden könnten. In Hinblick auf die Strömungs-Struktur-Interaktion ist jedoch zu berücksichtigen, dass die aus der Strömungslösung resultierende Lastverteilung räumlich stark begrenzte Gradienten aufweisen kann. Folglich wird auch für die eindimensionalen Konfigurationen mindestens die mittlere Netzauflösung verwendet.

Die Kreiszylinderschale sei in axialer und in Umfangsrichtung mit  $15 \times 77$  (grob),  $30 \times 155$  (mittel) und  $60 \times 300$  (fein) QUAD4-Elementen diskretisiert. Abbildung 4.5(b) zeigt aus den 100 niedrigsten Eigenschwingungsformen wieder diejenigen mit den größten Abweichungen zur Lösung der Richardson-Extrapolation nach Gleichung (4.2). Hierbei werden Eigenschwingungsformen mit niedriger Halbwellenzahl  $s_x$  in axialer Richtung (blau), niedriger Eigenkreisfrequenz  $\omega_{s_x, s_\theta}$  (schwarz) und hoher Umfangswellenzahl  $s_\theta$  (rot) unterschieden. Auf diese Gruppierung wird im Rahmen der numerischen Versuchsplanung in Abschnitt 7.2 detaillierter eingegangen. Anhand der geringen relativen Abweichungen der Eigenkreisfrequenzen von  $\epsilon_\omega < 1,4\%$  lässt sich schlussfolgern, dass alle drei Rechnetze die dynamischen Eigenschaften der Kreiszylinderschale mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben. Aus selbigen Gründen wie für die ebene Schale wird dennoch die mittlere Netzauflösung verwendet.

### Raum- und Zeitkonvergenz von Grenzzyklusschwingungen

Aufbauend auf den Erkenntnissen über die benötigte räumliche Auflösung der Strukturfelder sei anschließend der Diskretisierungseinfluss des Strömungsfeldes auf die Lösung des Strömungs-Struktur-gekoppelten Systems analysiert. Zunächst stehe hierzu exemplarisch eine Grenzzyklusschwingungen der eindimensionalen ebenen Schale in einer viskosen Strömung bei  $M_\infty = 1,2$  (RANS-Gleichungen und Turbulenzmodell nach Spalart-Allmaras



**Abbildung 4.6:** Einfluss der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung auf die Amplitude  $\hat{w}$  und Frequenz  $\omega$  einer Grenzzyklusschwingung in reibungsfreien Strömungen.

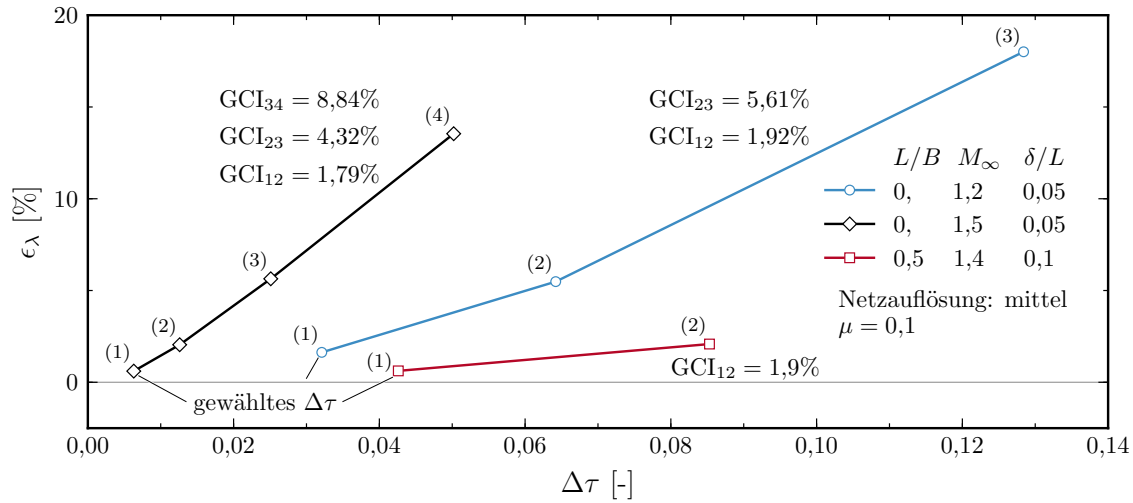
(SA)) im Fokus. Die hierbei auftretenden Druckgradienten stellen, verglichen mit der Bestimmung aeroelastischer Stabilitätsgrenzen, höhere Anforderungen an die räumliche Auflösung des Rechnernetzes. Darüber hinaus ist aufgrund des instationären Charakters der Lösung insbesondere der Einfluss der zeitlichen Diskretisierung von hoher Bedeutung.

Für die räumliche Diskretisierung des Strömungsfeldes werden drei unterschiedliche Netzauflösungen gewählt, die über dem Kopplungsrand aus jeweils  $100 \times 62$  (grob),  $200 \times 125$  (mittel) und  $400 \times 250$  (fein) Zellen in  $x$ - und  $z$ -Richtung bestehen. Die physikalische Zeitschrittweite wird von  $\Delta\tau = 0,05$  bis  $0,4$  variiert.

**Tabelle 4.1:** *Grid-convergence-index* (GCI) der zeitlichen Auflösung einer Grenzzyklusschwingung bei verschiedenen Netzauflösungen.

$GCI_{\Delta\tau}$ [%]	grob		mittel		fein	
	$\hat{w}$	$\omega$	$\hat{w}$	$\omega$	$\hat{w}$	$\omega$
$GCI_{0,4-0,2}$	13,48	10,06	13,81	10,19	12,80	10,09
$GCI_{0,2-0,1}$	4,05	3,24	3,40	2,71	3,74	3,05
$GCI_{0,1-0,05}$	0,97	0,70	1,31	1,05	1,08	0,78

Abbildung 4.6 stellt die Ergebnisse dieser Studie für einen dimensionslosen dynamischen Druck von  $\lambda = 300$  einander gegenüber. Nimmt die Zeitschrittweite  $\Delta\tau$  ab, so streben die lokalen Amplituden  $\hat{w}(\xi = 0,5)$  und Frequenzen  $\omega$  der Schwingungen auf allen Rechnernetzen asymptotisch dem nach Gleichung (4.2) extrapolierten Grenzwert entgegen. Die dazugehörigen GCI-Werte in Tabelle 4.1 zeigen, dass die Amplitude  $\hat{w}$  der Grenzzyklusschwingung etwas sensibler auf die zeitliche Auflösung reagiert als die dazugehörige Frequenz  $\omega$ . Weiterhin wird deutlich, dass der Einfluss der räumlichen Diskretisierung gering ist. Eine äquivalente Auswertung der GCI-Werte für die Netzauflösung zeigt Abweichungen unterhalb von 1 %. Daher wird die mittlere Netzauflösung verwendet und die verfügbaren Rechenressourcen in die zeitliche Auflösung investiert. Die gewählte Zeitschrittweite von  $\Delta\tau = 0,05$  entspricht einer Unterteilung der Schwingungsperiode in etwa 170 Zeitschritte. Dies wird in den folgenden Studien als Richtwert herangezogen, wenn die zeitliche Auflösung aufgrund höher-harmonischer Schwingungsanteile anzupassen ist.



**Abbildung 4.7:** Einfluss der zeitlichen Diskretisierung auf die Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  in reibungsbehafteten Strömungen.

### Zeitkonvergenz aeroelastischer Stabilitätsgrenzen

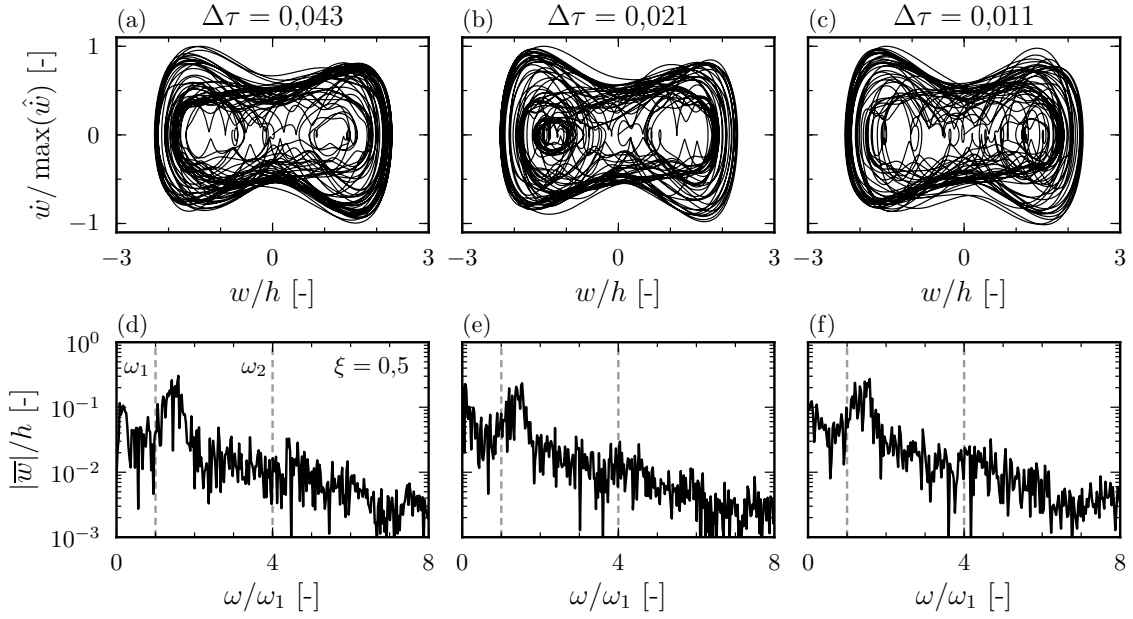
Bei der Bestimmung aeroelastischer Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  ist die hohe Sensitivität der Lösung auf die zeitliche Diskretisierung zu beachten [15, 84, 85]. Für die folgende Zeitkonvergenzstudie wird die mittlere Netzauflösung des Strömungs- und Strukturfeldes herangezogen und anschließend  $\lambda_{\text{krit}}$  für variierende Zeitschrittweiten von  $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-3}$  bis 0,13 bestimmt. Abbildung 4.7 gibt exemplarisch den Konvergenzverlauf dreier Panelflatter-Konfigurationen wieder:  $M_\infty = 1,2$  (2D,  $\delta/L = 0,05$ ), 1,4 (3D,  $\delta/L = 0,1$ ) und 1,5 (2D,  $\delta/L = 0,05$ ), jeweils normiert auf den nach Gleichung (4.2) bestimmten asymptotischen Grenzwert  $\lambda_{\text{kont}}$ . Da die Ergebnisse signifikant von der Machzahl  $M_\infty$  abhängen, ist für jede Stabilitätsuntersuchung eine separate Zeitkonvergenzstudie erforderlich.

Mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  lässt sich eine Zunahme der Sensitivität bezüglich  $\Delta\tau$  feststellen, die auf die Anfachung und aerodynamische Kopplung verschiedener Eigenschwingungsformen zurückgeführt werden kann. So wird etwa im niedrigen Überschallbereich ein Ein-Freiheitsgrad-Flattern identifiziert, während bei höheren supersonischen Machzahlen die aerodynamische Kopplung unterschiedlicher Eigenschwingungsformen dominiert (vgl. Abschnitt 2.2). Der Übergang zwischen diesen Fluttermechanismen im Bereich  $M_\infty \approx 1,5$  stellt hohe Anforderungen an die zeitliche Auflösung, da hier oftmals hochfrequente Schwingungszustände angefacht werden (vgl. Abschnitt 4.5). Die Ergebnisse der dreidimensionalen Konfiguration bestätigen, dass die Berücksichtigung der Querströmungen keinen negativen Einfluss auf die Zeitkonvergenz hat.

### Zeitkonvergenz nicht-periodischer Schwingungen

Weisen die Lösungen einen nicht-periodischen oder chaotischen Charakter auf, erschwert dies die Bestimmung einer skalaren Lösungsgröße und somit die Quantifizierung des Diskretisierungsfehlers über die Richardson-Extrapolation nach Gleichung (4.2). In diesem Fall bietet sich eine Bewertung des Diskretisierungseinflusses anhand qualitativer Eigenschaften von Phasenraumportraits und frequenzbasierten Amplitudenspektren an.





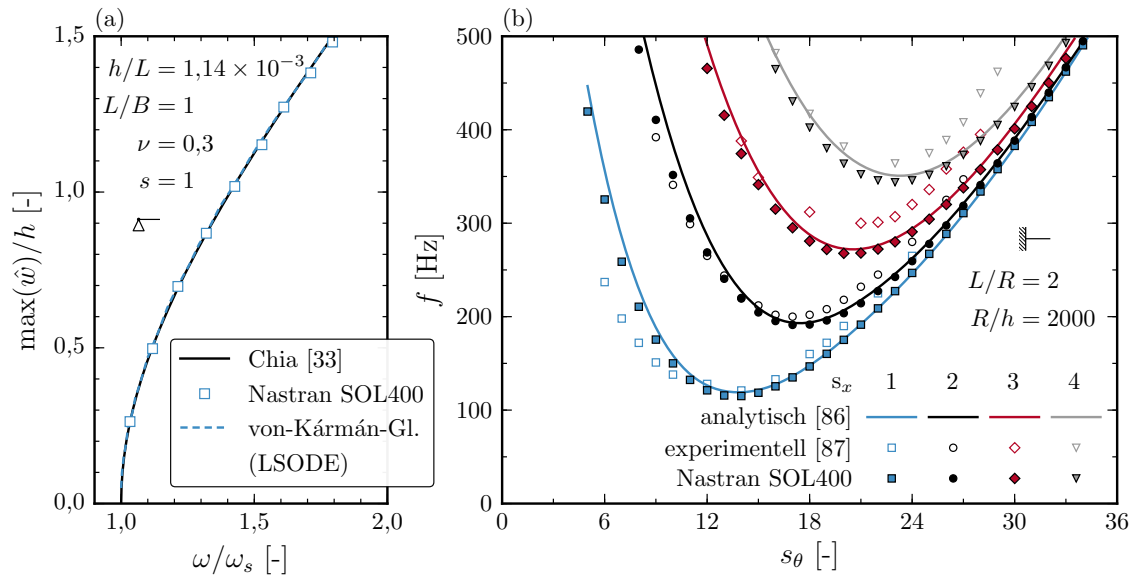
**Abbildung 4.8:** Einfluss der zeitlichen Diskretisierung auf die nicht-periodische Schwingung einer ebenen Schale bei  $M_\infty = 1,2$ ,  $\lambda = 50$  und  $R_x = 6,7$ .

Abbildung 4.8 vergleicht exemplarisch die instationäre Lösung einer elastischen Schale nach der von-Kármán’schen Plattengleichung (3.11) in einer linearisierten Potentialströmung (Gleichung (3.47)) bei  $M_\infty = 1,2$  und  $\lambda = 50$  für drei verschiedene Zeitschrittweiten:  $\Delta\tau = 0,043$ ,  $0,021$  und  $0,011$ . Eine stationäre Membranlast von  $R_x = 6,7$  verantwortet hierbei einen stark nicht-periodischen Charakter der Lösung. Aus einer exemplarischen Betrachtung der vierten Eigenschwingungsform in Strömungsrichtung, deren Periodendauer entsprechend mit 21, 42 und 84 physikalischen Zeitschritten aufgelöst wird, geht hervor, dass der Diskretisierungsfehler maßgeblich von der gewählten Zeitschrittweite und kaum von der Anzahl der berücksichtigten modalen Freiheitsgrade abhängt.

Die Phasenraumportraits in Abbildungen 4.8(a) bis (c) deuten bezüglich der lokalen Verformung  $w(\xi = 0,5)$  und ihrer zeitlichen Ableitung an, dass die oben aufgeführten Zeitschrittweiten  $\Delta\tau$  die dynamischen Eigenschaften der nicht-periodischen Schwingung zufriedenstellend wiedergeben. Zudem weisen die dazugehörigen Amplitudenspektren in Abbildung 4.8(d) bis (f) eine breitbandige Energieverteilung mit vergleichbaren lokalen Amplitudenmaxima  $|\bar{w}|$  im Bereich  $\omega/\omega_1 \approx 1,5$  auf. Daher ist anzunehmen, dass der Einfluss der gewählten Zeitschrittweite  $\Delta\tau$  auf die Eigenschaften nicht-periodischer Lösungen gering ist. Um numerische Instabilitäten bei der Integration der Modellgleichungen auszuschließen, wird in entsprechenden Studien dennoch die kleinste Zeitschrittweite  $\Delta\tau = 0,011$  gewählt, sobald sich ein nicht-periodischer Lösungscharakter andeutet.

## 4.5 Verifizierung und Validierung

Obwohl viskose Strömungsphänomene in dieser Arbeit von besonderem Interesse sind, bietet sich für die Verifizierung und Validierung der verwendeten Lösungsverfahren zunächst die Betrachtung reibungsfreier Testfälle an. Auf diese Weise lässt sich unabhängig



**Abbildung 4.9:** Numerische Lösungen ebener (links) und kreiszylindrischer Schalen (rechts) im Vergleich mit theoretischen und experimentellen Literaturdaten.

von den Annahmen der Grenzschichtmodellierung die Implementierung der Kopplungsalgorithmen verifizieren. Zu diesem Zweck werden Vergleichslösungen aus der Literatur herangezogen, die sich in reibungsfreie Unterschall- (Abschnitt 4.5.2), niedrige Überschall- (Abschnitt 4.5.3) und hohe Überschallströmungen (Abschnitt 4.5.4) untergliedern lassen. Die Unterscheidung der beiden letztgenannten Kategorien basiert auf einem signifikanten Anstieg der Stabilitätsgrenze bei  $M_\infty \approx \sqrt{2}$ . Anschließend wird in Abschnitt 4.5.5 die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht durch die Lösung der RANS-Gleichungen mit einem SA-Turbulenzmodell berücksichtigt und die Ergebnisse mit experimentellen und numerischen Daten aus der Literatur verglichen.

Abschnitt 4.5 zielt zudem darauf ab, einen Überblick über geeignete Literaturquellen zur Verifizierung und Validierung numerischer Lösungsansätze für Panelflatter-Problestellungen zu geben und diese in Hinblick auf die Qualität ihrer Ergebnisse zu diskutieren.

#### 4.5.1 Dynamik der Strukturmodelle

Zur Verifizierung der implementierten Strukturlösungsansätze bietet sich ein Vergleich mit analytischen Ergebnissen von Chia [33] an. Basierend auf der von-Kármán'schen Plattengleichung untersucht der Autor unter anderem den Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten auf die freien Schwingungen isotroper Schalen. Abbildung 4.9 zeigt in diesem Kontext den Zusammenhang zwischen der maximalen Schwingungsamplitude  $\max(\hat{w})$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  einer quadratischen Schale. Die Abweichung der Kreisfrequenz  $\omega$  von der linearen Lösung  $\omega_1$  verdeutlicht, dass geometrische Nichtlinearitäten bereits ab einer Schwingungsamplitude von circa 30 % der Schalendicke  $h$  signifikant in Erscheinung treten.

Die Lösungen der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.23) mittels des im LSODE implementierten Adams-Moulton-Verfahrens (vgl. Abschnitt 3.1.3) weisen eine exzellente Über-



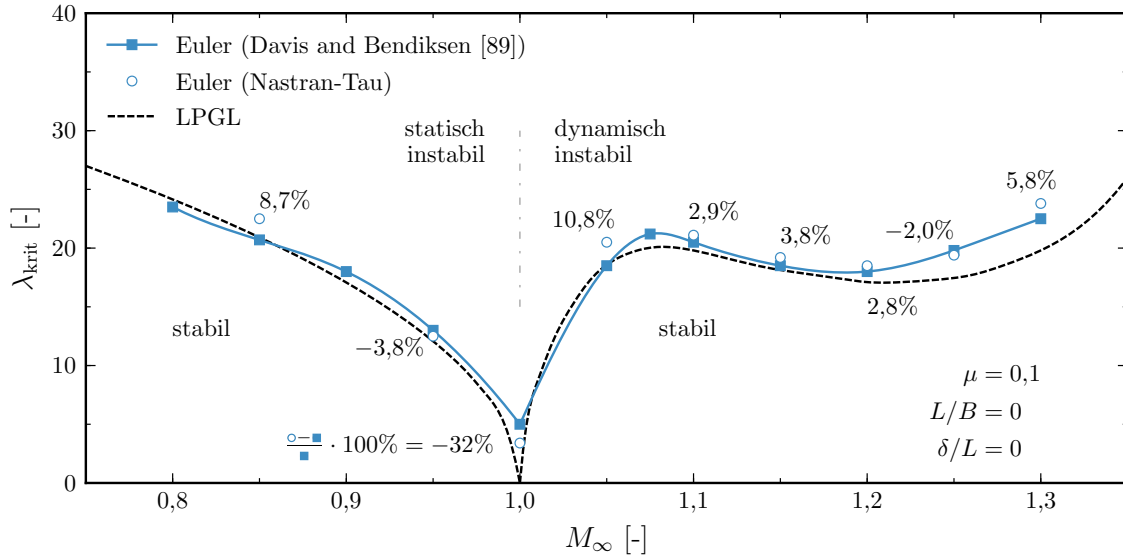
einstimmung mit den analytischen Ergebnissen von Chia [33] auf. Dass sich die Ergebnisse ebenso mit Nastran SOL400 sehr gut reproduzieren lassen zeigt, dass beide Integrationsverfahren korrekt implementiert und für die Problemstellungen der vorliegenden Arbeit geeignet sind.

In Hinblick auf die Analyse isotroper Kreiszylinderschalen zeigt Abbildung 4.9(b) die mit Nastran SOL400 bestimmten Eigenfrequenzen des in Abschnitt 4.4.1 vorgestellten Strukturmodells. Diesen sind sowohl analytische Ergebnisse von Arnold und Warburton [86] als auch experimentelle Daten von Olson [87] gegenübergestellt. Arnold und Warburton leiten auf Basis der Schalentheorie von Timoshenko [88] die Eigenschwingungsformen einer fest eingespannten, dünnwandigen ( $R/h = 2000$ ) Kreiszylinderschale mit einem Längen-zu-Radien-Verhältnis von  $L/R = 2$  ab. Der qualitative Zusammenhang zwischen den Eigenfrequenzen  $f$  und den Wellenzahlen der dazugehörigen Eigenschwingungsform in axialer- und Umfangsrichtung,  $s_x$  und  $s_\theta$ , kann phänomenologisch durch die Überlagerung zweier strukturdynamischer Effekte erklärt werden. Zum einen lässt sich der Bereich zwischen zwei axial verlaufenden Knotenlinien als eine gekrümmte Schale betrachten, die für kleine Halbwellenzahlen in Umfangsrichtung  $s_\theta$  durch die versteifende Wirkung der Krümmung einen hohen Beitrag zur Eigenfrequenz  $f$  leistet. Zum anderen nähert sich das betrachtete Schalensegment für hohe  $s_\theta$ -Werte der ebenen Schale an, wodurch der Einfluss der Krümmung vernachlässigbar wird. In diesem Bereich dominiert ein zweiter Effekt, der aus der Dynamik einer Kreiszylinderschale mit freien Rändern (Ring) resultiert. Hierbei korrelieren hohe Halbwellenzahlen in Umfangsrichtung  $s_\theta$  mit hohen Eigenfrequenzen der Ringstruktur und erklären somit die in Abbildung 4.9(b) dargestellte Zunahme der entsprechenden Zylinder-Eigenfrequenzen [86].

Die Lösung des oben vorgestellten Strukturmodells mit Nastran SOL400 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen von Arnold [86]. Darüber hinaus verdeutlicht ein Vergleich mit den experimentellen Daten von Olson [87], dass die Dynamik der Kreiszylinderschale von den theoretischen Lösungsansätzen zufriedenstellend wiedergegeben wird. Die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment werden von Olson unter anderem auf fertigungsbedingte Variationen der Materialdicke zurückgeführt [87].

#### 4.5.2 Reibungsfreie Unterschallströmung

Davis und Bendiksen [89] bestimmen mittels eines partitionierten Lösungsansatzes die aeroelastischen Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  einer gelenkig gelagerten, eindimensionalen ebenen Schale in einer reibungsfreien Unterschallströmung durch die numerische Lösung der Euler-Gleichungen (3.40) im Zeitbereich. In Abschnitt 2.2 wurde gezeigt, dass in subsonischen Strömungen überwiegend aeroelastisches Beulen auftritt. Die Ergebnisse von Davis und Bendiksen [89], dargestellt in Abbildung 4.10, untermauern diese Aussage und zeigen zudem, dass der kritische dynamische Druck  $\lambda_{\text{krit}}$  mit zunehmender Machzahl abnimmt. Die Ergebnisse wurden in dieser Arbeit mit TAU-Python (Nastran-Tau) reproduziert und in Abbildung 4.10 einander gegenübergestellt. Mit einer maximalen Abweichung von 8,7 % bei  $M_\infty = 0,85$  konnte eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Literaturergebnissen erzielt werden. Für  $M_\infty = 1$  ist die Abweichung zwar deutlich größer, jedoch lässt sich im Zuge einer näheren Betrachtung der linearisierten Potentialgleichung (3.47) zeigen, dass die aerodynamischen Lasten für  $M_\infty \rightarrow 1$  unendlich groß werden und somit  $\lambda_{\text{krit}} \rightarrow 0$  folgt [90]. Durch numerische Dissipation beim Lösen der Euler-Gleichungen wird diese Singularität eliminiert. Für Streckungsverhältnisse von  $L/B > 0$  ist der kritische dynamische

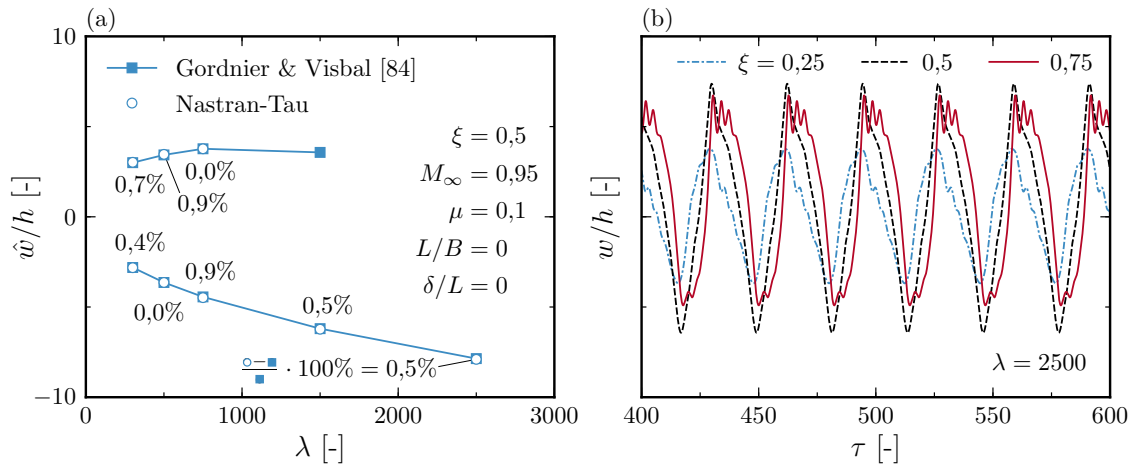


**Abbildung 4.10:** Aeroelastische Stabilitätsgrenze einer ebenen Schale im Vergleich mit Ergebnissen von Davis und Bendiksen [89] sowie Dowell [90].

Druck  $\lambda_{\text{krit}}$  größer als Null [90], d.h. der stark ausgeprägte Einbruch der Stabilitätsgrenze ist eher theoretischer Natur.

Zusätzlich zu den Ergebnissen von Davis und Bendiksen [89] werden Dowells Lösungen der linearisierten Potentialgleichung und der von-Kármán'schen Plattengleichung [90] herangezogen, die im Bereich subsonischer Strömungen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit den vorangegangenen Ergebnissen zeigen. Für  $\hat{w} \rightarrow 0$  müssen die Lösungen der linearisierten Potentialgleichung mit jenen der Euler-Gleichungen übereinstimmen. Die Abweichungen sind daher insbesondere für  $M_\infty = 1$  auf die numerische Diskretisierung der Systemgleichungen zurückzuführen.

Darüber hinaus studieren sowohl Davis und Bendiksen [89] als auch Gordnier und Visbal [84] auf Grundlage der Euler-Gleichungen (3.40) die aeroelastischen Eigenschaften der eindimensionalen ebenen Schale im instabilen Zustandsbereich. An dieser Stelle sei exemplarisch auf  $M_\infty = 0,95$  näher eingegangen, um die Sensitivität der Systemantwort bezüglich der initialen Störung zu analysieren. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, wird das aeroelastische System über eine geringe Geschwindigkeitsverteilung gemäß der ersten Eigenschwungsform ( $\dot{q}_1 \neq 0$ ) in seiner Ruhelage gestört. In Abhängigkeit des Vorzeichens von  $\dot{q}_1$  nimmt das System einen stationären Gleichgewichtszustand (aeroelastisches Beulen) mit positiven oder negativen Auslenkungen bezüglich der kartesischen  $z$ -Koordinate an. Die TAU-Python-Ergebnisse (Nastran-Tau) sind in Abbildung 4.11(a) in Form der Verschiebung  $\hat{w}(\xi = 0,5)$  jenen von Gordnier und Visbal [84] gegenübergestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass die Lösungen in Bezug auf den ungestörten Gleichgewichtszustand unsymmetrisch sind. Ein weiterer bemerkenswerter Effekt ist für  $\lambda = 2500$  zu beobachten: In Abhängigkeit von der Anfangsstörung nimmt das System entweder einen negativen stationären Gleichgewichtszustand an oder es stellt sich eine Grenzzyklusschwingung ein, die durch eine Überlagerung hochfrequenter Anteile charakterisiert ist. Letztere geht mit einer komplexen Dynamik einzelner Verdichtungsstöße im Fluid, die stromauf über die Schale wandern, einher. Abbildung 4.11(b) zeigt die Verformungshistorien  $w(\xi, \tau)$  der diskreten Positionen  $\xi = 0,25, 0,5$  und  $0,75$ . Für eine detaillierte Beschreibung des komplexen Strö-



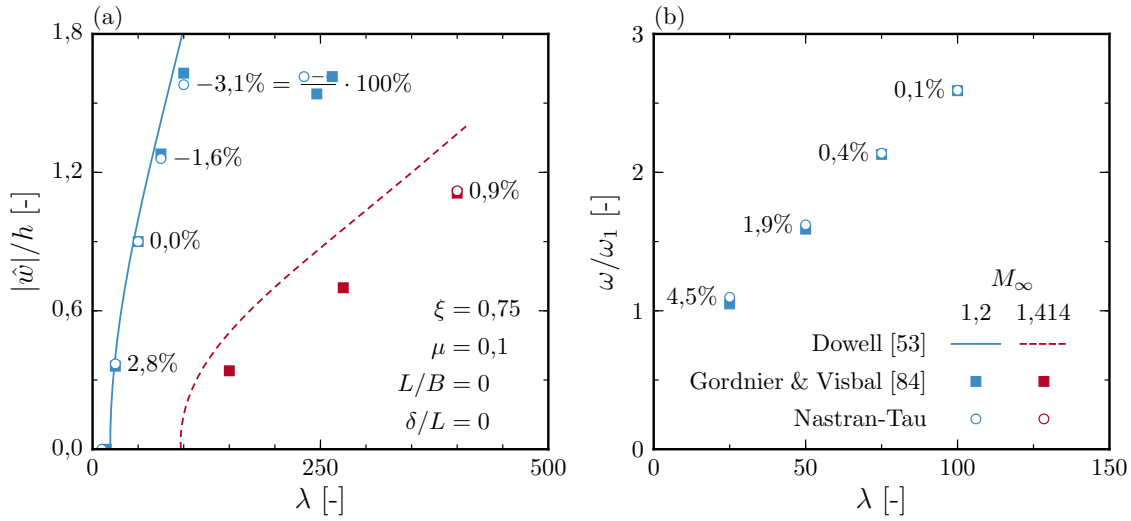
**Abbildung 4.11:** Verformungsamplituden  $\hat{w}(\xi = 0,5)$  (links) und Zeithistorie lokaler Verschiebungen  $w(\xi, \tau)$  einer ebenen Schale in subsonischen Strömungen.

mungsfeldes sei auf die ausführlichen Diskussionen der oben genannten Autoren [84, 89] verwiesen. An dieser Stelle sei vielmehr hervorgehoben, dass sich die hier verwendeten Literaturquellen [84] und [89] sehr gut zur Validierung von Panelflatter-Problemstellungen in subsonischen Strömungen eignen, da bei dieser komplexen aeroelastischen Problemstellung zwei voneinander unabhängige Literaturquellen zu vergleichbaren Ergebnissen kommen. Über den Einfluss instationärer nichtlinearer Kompressibilitätseffekte auf die Charakteristika einer Grenzzyklusschwingung lässt sich zudem beurteilen, ob das Strömungsfeld mit einer akzeptablen räumlichen Auflösung diskretisiert wurde. Abbildung 4.11 verdeutlicht, dass die Ergebnisse sowohl hinsichtlich des aeroelastischen Beulens als auch in Bezug auf die Grenzzyklusschwingung zufriedenstellend mit den Lösungen von Gordnier und Visbal [84] übereinstimmen. Im erstgenannten Fall betragen die Abweichungen bezüglich der Verformungsamplituden  $\hat{w}(\xi)$  weniger als 1 %. Ebenso lässt sich für die Grenzzyklusschwingungen mit Abweichungen der maximalen Amplitude  $\max(\hat{w}(\xi, \tau))$  und der reduzierten Frequenz  $k$  von weniger als 7 % (siehe Tabelle 4.2) eine zufriedenstellende Übereinstimmung feststellen.

**Tabelle 4.2:** Vergleich der Verformungsamplitude  $\max(\hat{w})$  und reduzierten Frequenz  $k$  für  $M_\infty = 0,95$  und  $\lambda = 2500$  mit Ergebnissen von Gordnier und Visbal [84].

	Gordnier und Visbal [84]	TAU-Python	Abweichung [%]
$\max(\hat{w})/h$	7,38	7,0	-5,2
$k$	0,195	0,182	-6,5

Im Kontext subsonischer Strömungsgeschwindigkeiten sei abschließend hervorgehoben, dass in den vorangegangenen Diskussionen eindimensionale Schalen mit jeweils identischen geometrischen Randbedingungen an der Vorder- und Hinterkante betrachtet wurden. Weiterführende Studien von Dowell [27] zeigen darüber hinaus, dass die Ergebnisse qualitativ mit jenen zweidimensionaler Schalen übereinstimmen. Eine Variation der Randbedingungen, z.B. eine freie Hinterkante, kann jedoch zu einer Anfachung dynamischer Instabi-



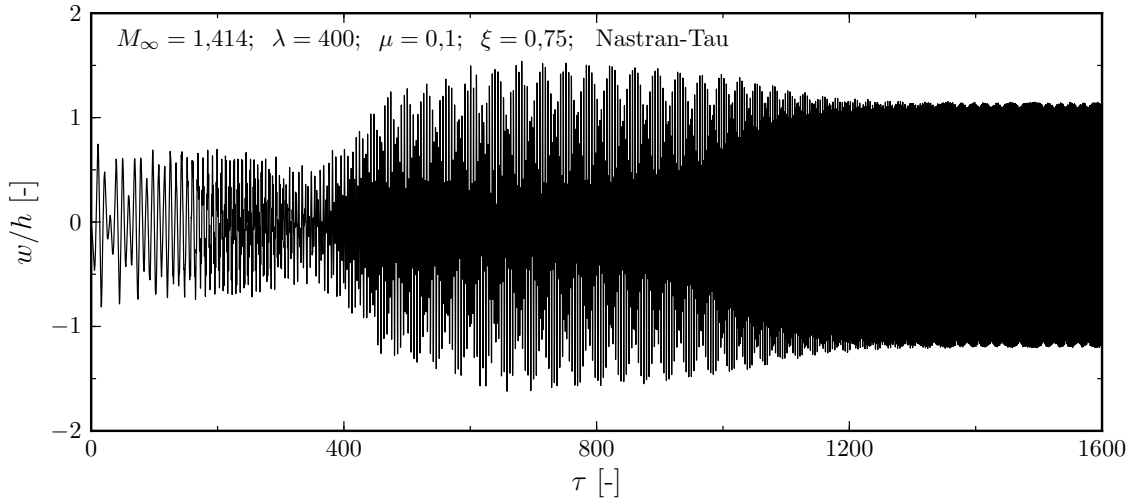
**Abbildung 4.12:** Lokale Verformungsamplituden  $|\hat{w}|$  und Frequenzen  $\omega$  einer Grenzzyklusschwingung im niedrigen Überschall.

litäten führen. Solche Problemstellungen finden sich ebenfalls an aerodynamischen Verkleidungen von Trägerraketen [24]. Sowohl Dowell [91] als auch neuere Veröffentlichungen von Gibbs und Wang [92] präsentieren in diesen Zusammenhang theoretische und experimentelle Ergebnisse für ebene Schalen mit variierenden geometrischen Randbedingungen. Da solche Systeme jedoch schnell an Komplexität gewinnen, sind sie im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht dazu geeignet, den Einfluss turbulenter Grenzschichten besser zu verstehen.

### 4.5.3 Reibungsfreie niedrige Überschallströmung

In Abschnitt 2.2 wurde anhand eines vereinfachten Beispiels nachgewiesen, dass ebene Schalen in supersonischen Strömungen bei der Überschreitung eines kritischen dynamischen Drucks  $\lambda_{\text{krit}}$  dynamischen Instabilitäten unterliegen können. Analog zu den vorangegangenen Diskussionen vergleicht Abbildung 4.10 in diesem Zusammenhang die Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  von Davis und Bendiksen [89] mit Ergebnissen dieser Arbeit. Beide Ansätze basieren auf Lösungen der Euler-Gleichungen (3.40). Zwischen Mach 1,05 und 1,3 nimmt  $\lambda_{\text{krit}}$  hierbei überwiegend zu, unterbrochen von einem lokalen Minimum bei  $M_\infty = 1,2$ .

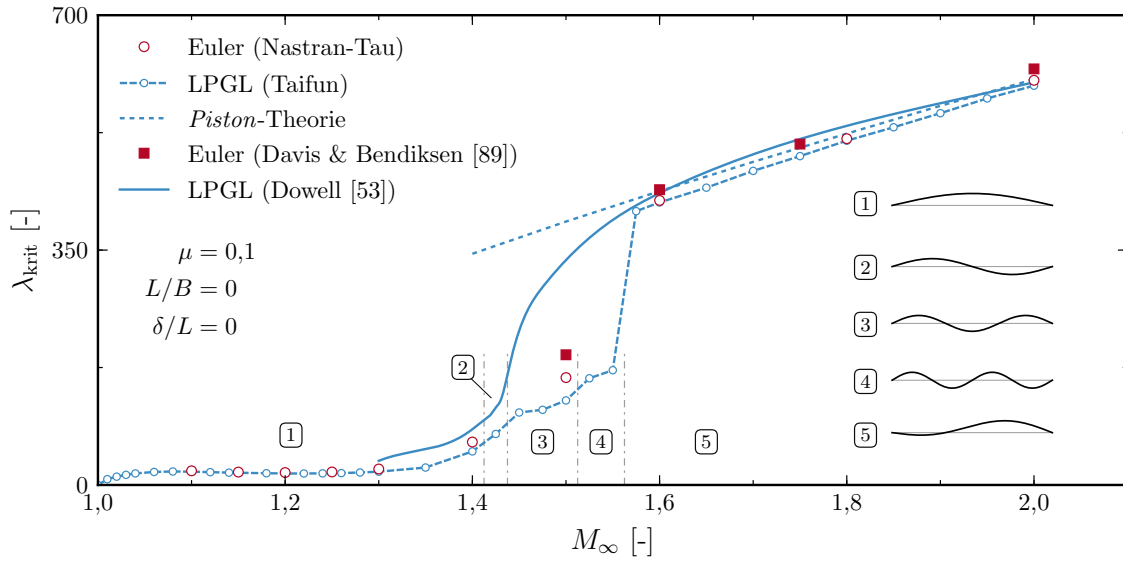
*Bemerkung 4.3:* In der Literatur wird die Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  häufig als kontinuierliche Kurve vom Unter- in den Überschallbereich dargestellt (vgl. [27, 89]). Dies kann zu Missinterpretationen führen, wie die Darstellung nach Davis und Bendiksen [89] in Abbildung 4.10 verdeutlicht. So weisen die Autoren in [89] für  $M_\infty = 1$  sowohl dynamische als auch statische Instabilitäten bei verschiedenen  $\lambda_{\text{krit}}$  nach. Demzufolge darf der Einbruch der Stabilitätsgrenze nicht als sogenannter *transonic dip* missinterpretiert werden. Zudem sind die Ergebnisse von Davis und Bendiksen [89] für  $M_\infty = 1$  mit Vorsicht zu betrachten, da jegliche Störungen in einer Potentialströmung singulär werden und die Lösungen der Euler-Gleichungen (3.40) in diesem Zusammenhang stark von numerischer Dissipation beeinflusst sind.



**Abbildung 4.13:** Einschwingvorgang einer hochfrequenten Grenzzyklusschwingung bei  $M_\infty = 1,414$  nach Anregung der ersten Eigenschwingungsform.

Ein Vergleich der TAU-Python-Ergebnisse (Nastran-Tau) mit jenen von Davis und Bendiksen [89] in Abbildung 4.10 zeigt für  $M_\infty > 1$  eine zufriedenstellende Übereinstimmung. Zusätzliche Vergleichsdaten auf Basis der linearisierten Potentialströmung finden sich zwar in [27], jedoch verhindert die Auflösung der entsprechenden Ergebnisdarstellung ein exaktes Ablesen der Ergebnisse. An dieser Stelle kommt daher das Taifun-Verfahren zum Einsatz, um die Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  aus der gekoppelten Lösung der von Kármán'schen Plattengleichung (3.23) und der linearisierten Potentialgleichung (3.47) zu bestimmen. Anhand der in Abbildung 4.10 dargestellten Ergebnisse lässt sich nachweisen, dass die verwendeten Lösungsansätze korrekt implementiert wurden, da beide Ansätze für den Grenzfall  $\hat{w}/h \rightarrow 0$  auf nahezu identische Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  führen.

Über die Bestimmung der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  hinaus sei der instabile Zustandsbereich für die Machzahlen 1,2 und 1,414 als Validierungsfall gewählt. Abbildung 4.12 stellt die Lösungen in Form der lokalen Amplitude  $\hat{w}(\xi = 0,75)$  und Kreisfrequenz  $\omega$  ausgewählter Grenzzyklusschwingungen einander gegenüber. Für die Validierung werden zwei Literaturquellen herangezogen: Dowell löst die linearisierte Potentialgleichung (3.47) zur Bestimmung der instationären Luftkräfte [53], während Gordnier und Visbal [84] wie in den vorangegangenen Diskussionen die Euler-Gleichungen (3.40) lösen. Die Problemstellungen sind charakterisiert durch ein periodisch alternierendes Auftreten von Verdichtungsstößen und Expansionswellen im Bereich der Einspannung, verbunden mit signifikanten geometrischen Nichtlinearitäten der Struktur. Ein für Validierungszwecke bedeutendes Phänomen tritt für  $M_\infty = 1,414$  auf: Abbildung 4.13 zeigt anhand der Zeithistorie eines Punktes auf der Schale bei  $\xi = 0,75$ , dass das System nach der Anregung des ersten modalen Freiheitsgrades in eine hochfrequente Grenzzyklusschwingung übergeht. Hierbei ist der Einschwingvorgang im Vergleich zu den vorangegangenen Rechnungen sehr lang. Dieses Phänomen wurde erstmals durch Gordnier und Visbal [84] beschrieben. Analog zu den Beobachtungen in der vorliegenden Arbeit identifizieren die Autoren ein Ein-Freiheitsgrad-Flattern in der dritten Eigenschwingungsform  $\psi_3$ . Aktuelle Studien von Vedenev et al. [93] bestätigen diese Beobachtung ebenfalls auf Basis eines partitionierten Lösungsansatzes. Gordnier und Visbal beschreiben zudem umfassend die Lösungen gelenkig gelagerter und fest eingespannter ebener Schalen bei  $M_\infty = 1,2$ ,  $1,414$  und  $1,8$  [84]. Letztere Quelle eig-



**Abbildung 4.14:** Aeroelastische Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  einer ebenen Schale im supersonischen Geschwindigkeitsbereich.

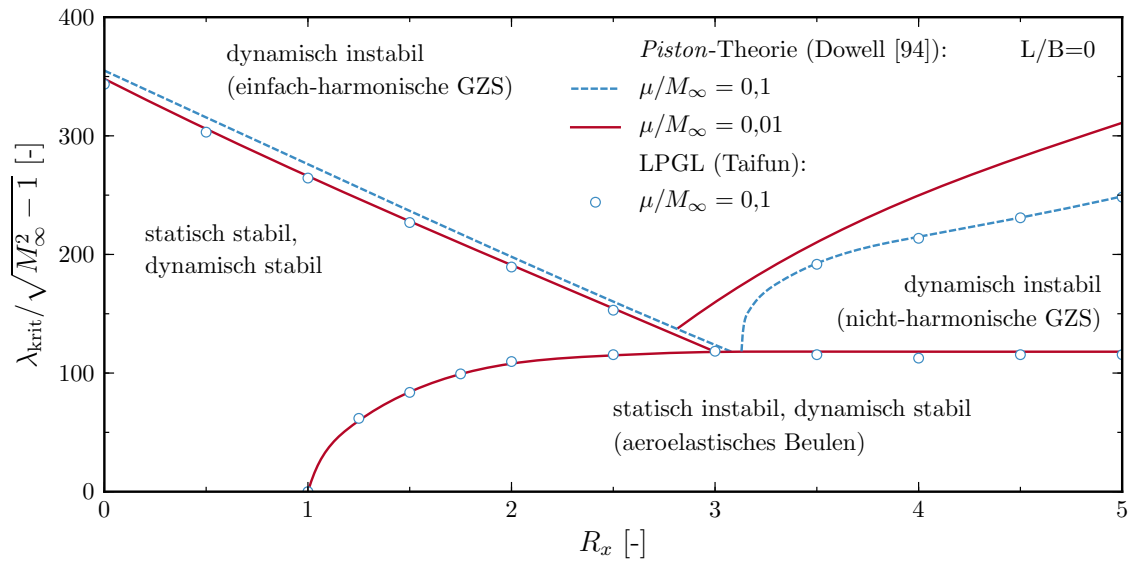
net sich daher insbesondere zur Validierung instationärer Lösungen unter dem Einfluss signifikanter strukturdynamischer und aerodynamischer Nichtlinearitäten. In Bezug auf die TAU-Python-Ergebnisse (Nastran-Tau) zeigt Abbildung 4.12, dass die Abweichungen der Amplituden  $\hat{w}$  ( $\epsilon_{\hat{w}} < 3,1\%$ ) und Frequenzen  $\omega$  ( $\epsilon_{\omega} < 5\%$ ) akzeptabel sind. Für  $M_{\infty} = 1,414$  wurde eine Abweichung der Frequenz von weniger als 1% zu dem Ergebnis von Gordnier und Visbal [84] ermittelt (nicht dargestellt). Daraus lässt sich schließen, dass die Implementierung des Kopplungsalgorithmus in TAU-Python geeignet ist, Grenzzykelschwingungen im niedrigen Überschallbereich korrekt wiederzugeben, auch wenn sich die Anfangsstörung stark von dem eingeschwungenen Zustand unterscheidet.

#### 4.5.4 Reibungsfreie hohe Überschallströmung

Der Machzahlbereich oberhalb von  $M_{\infty} \approx 1,5$  ist insofern besonders für die Validierung und Verifizierung numerischer Lösungsansätze geeignet, als dass in der Literatur zahlreiche validierte Vergleichsdaten zur Verfügung stehen. In diesem Zusammenhang werden am Beispiel der eindimensionalen, gelenkig gelagerten ebenen Schale in einer reibungsfreien Strömung die Ergebnisse von Dowell auf Grundlage der linearisierten Potentialgleichung (3.47), sowie jene von Davis und Bendiksen [89] (siehe Erläuterungen in Abschnitt 4.5.2) auf Grundlage der Euler-Gleichungen (3.40) herangezogen. Da beide Ansätze auf der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11) zur Modellierung der strukturdynamischen Eigenschaften basieren, lassen sich etwaige Abweichungen auf die Modellierung des Strömungsfeldes zurückführen.

Abbildung 4.14 verdeutlicht, dass die Autoren die aeroelastische Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  für einen Machzahlbereich von  $1,6 \leq M_{\infty} \leq 2$  nahezu identisch wiedergeben. Demgegenüber sind die gekoppelten Lösungen auf Basis der drei reibungsfreien Modellgleichungen gestellt, d.h. der *Piston*-Theorie nach Gleichung (3.53), der linearisierten Potentialgleichung (3.47) (Taifun) und der Euler-Gleichungen (3.40) (TAU-Python; Nastran-Tau). Diese zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den oben aufgeführten Literaturdaten. Zudem



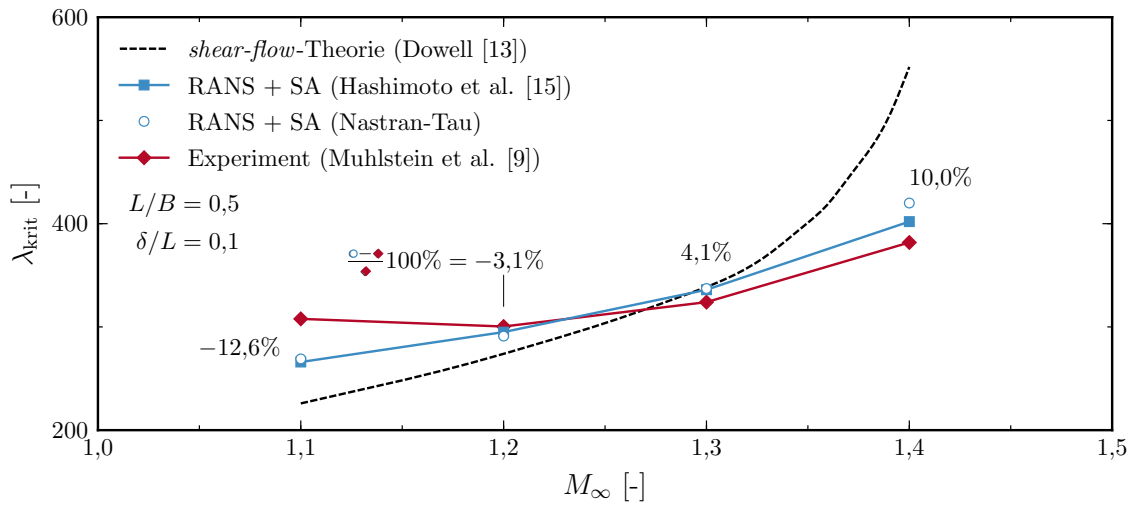


**Abbildung 4.15:** Stabilitätsbereiche einer ebenen Schale für  $M_\infty = 2$ .

lassen sich die dazugehörigen Schwingungsformen für  $M_\infty \geq 1,6$  als Überlagerung der ersten und zweiten Eigenschwingungsform beschreiben und somit dem in den analytischen Vorstudien identifizierten Mechanismus des Mehr-Freiheitsgrad-Flatterns zuordnen (vgl. Abschnitt 2.1).

Ferner ist in Abbildung 4.14 für  $M_\infty = 1,5$  eine nicht unerhebliche Diskrepanz zwischen den Ergebnissen von Dowell [53] und jenen von Davis und Bendiksen [89] zu erkennen. Letztgenannte Autoren begründen diesen Aspekt damit, dass die zu Beginn der Rechnung angeregte erste Eigenschwingungsform  $\psi_1$  zunächst gedämpft, gleichzeitig jedoch eine höhere Eigenschwingungsform ( $\psi_5$ , vgl. [89]) angefacht wird. Da diese Anfächung sehr schwach sein kann, ist der Effekt möglicherweise aufgrund der geringen Rechenleistung in den 1960er-Jahren und den damit verbundenen Einschränkungen bezüglich der maximal bestimmbaren Lösungszeiten unbemerkt geblieben. Die Lösungsansätze der vorliegenden Arbeit reproduzieren die Abnahme der Stabilitätsgrenze aufgrund des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns höherer Schwingungsformen  $\psi_s$ , wenngleich hierbei der modale Freiheitsgrad  $s = 3$  dominiert. Es deutet sich zudem der Zusammenhang an, dass mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  sukzessiv höhere Eigenschwingungsformen  $\psi_s$  aerodynamisch angefacht werden. Auf diese Erkenntnis wird in Kapitel 6 näher eingegangen.

Ein besonderes Interesse der aeroelastischen Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel 5 gilt dem instabilen Zustand ebener Schalen, die aufgrund einer vorgegebenen Druckbelastung in ihrer Ebene (Membranlast  $R_x > 0$ ) einer äußerst komplexen Dynamik unterliegen können. Hierbei kommt das Taifun-Verfahren zum Einsatz, um für einen möglichst großen  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraum die verschiedenen Stabilitätsbereiche zu identifizieren. Ein Vergleich mit Ergebnissen von Dowell [94] in Abbildung 4.15 zeigt für  $M_\infty = 2$  eine gute Übereinstimmung zwischen den Lösungen der linearisierten Potentialgleichung (3.47) und der Piston-Theorie [94], jeweils gekoppelt mit der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.23). Bei einem Masseverhältnis von  $\mu/M_\infty = 0,1$  ergibt sich mit Taifun ein etwas früherer Übergang in den Bereich einfach-harmonischer Grenzzykklusschwingungen. Die durch aeroelastisches Beulen und nicht-harmonische Grenzzykklusschwingungen charakterisierten Zustandsbereiche stimmen bei beiden Lösungsansätzen überein. Dies verifiziert nicht nur



**Abbildung 4.16:** Vergleich der mit TAU-Python bestimmten Stabilitätsgrenze  $\lambda_{krit}$  einer zweidimensionalen ebenen Schale mit experimentellen und numerischen Daten aus der Literatur.

die korrekte Implementierung der Modellgleichungen in Taifun, sondern bestätigt auch die Erkenntnis, dass der Einfluss der aerodynamischen Modellierung auf die aeroelastischen Eigenschaften ebener Schalen im hohen Überschallbereich gering ist [53, 89, 95].

#### 4.5.5 Reibungsbehaftete niedrige Überschallströmung

Abschließend seien zwei zusätzliche Parameter berücksichtigt: die endliche Breite  $B$  der ebenen Schale ( $L/B = 0,5$ ; siehe Abschnitt 4.4.1) sowie die Viskosität des Fluids. In Abschnitt 1.2 wurde im Rahmen der Motivation die von Muhlstein et al. [9] experimentell bestimmte Stabilitätsgrenze einer allseitig fest eingespannten Schale im niedrigen Überschall vorgestellt. Diese ist in Abbildung 1.2 den numerischen Ergebnissen auf Basis der *shear-flow*-Theorie von Dowell [13] und der RANS-Gleichungen von Hashimoto et al. [15] gegenübergestellt. Die Verwendung eines SA-Turbulenzmodells zur Schließung der RANS-Gleichungen (vgl. Anhang B) zeigt gegenüber der *shear-flow*-Theorie eine deutliche Verbesserung in der Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Abbildung 4.16 zeigt zudem, dass die Implementierung des partitionierten Lösungsansatzes in TAU-Python (Tau-Nastran), ebenfalls auf Basis der RANS-Gleichungen und des SA-Turbulenzmodells, eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Hashimoto et al. [15] liefert. Auf die Abweichungen zu den experimentellen Daten sei im Folgenden etwas detaillierter eingegangen.

Die experimentellen Ergebnisse von Muhlstein et al. [9] dienen als hervorragende Quelle zur Validierung numerischer Lösungsansätze. Dennoch müssen sie kritisch in Hinblick auf etwaige Messfehler begutachtet werden. So ist es nahe der Stabilitätsgrenze schwierig, unregelmäßige Schwingungen durch turbulente Fluktuationen in der Grenzschicht (akustische Störungen) von den eigentlichen Grenzzykklusschwingungen zu unterscheiden (siehe Kapitel 2). Sobald Letztere identifiziert werden können, ist die Verformungsamplitude  $\hat{w}$  bereits in der Größenordnung der Schalendicke  $h$  [9] und der Einfluss nichtlinearer Struktureffekte nicht mehr vernachlässigbar. Die Bestimmung der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{krit}$  über



eine Extrapolation nichtlinearer Grenzzyklusschwingungen ist hierbei durchaus fehlerbehaftet. Daher versuchen die Autoren in einer Folgestudie [96], über eine Analyse der mechanischen Impedanzen erzwungener Schwingungen die experimentellen Unsicherheiten der frei schwingenden Schale zu quantifizieren. Sie schlussfolgern in [96], dass die Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  im Bereich von  $M_\infty = 1,1$  vergleichsweise genau bestimmt werden konnten, diese bei höheren Machzahlen ( $M_\infty = 1,4$ ) jedoch tendenziell um bis zu 10 % höher liegen als ursprünglich in [9] angegeben. Untersuchungen von Dowell und Bendiksen [97] haben zudem ergeben, dass sich die Abweichungen vorangegangener Experimente zu entsprechenden theoretischen Lösungen maßgeblich auf die Fertigungstoleranzen der Windkanalexperimente ( $\pm 10\%$ ) und die Vernachlässigung der Kavität in den theoretischen Modellen ( $-5\%$  bis  $-10\%$ ) zurückführen lassen. Da es sich dabei um Experimente mit abweichenden Randbedingungen handelt, lassen sich aus diesen Aussagen keine quantitativen Fehlerbänder für die Stabilitätsgrenzen von Muhlstein et al. [9] ableiten. Dennoch zeigen diese Untersuchungen, dass die Abweichungen zwischen den TAU-Python-Lösungen (Tau-Nastran) und den experimentellen Daten insbesondere bei höheren Machzahlen  $M_\infty$  als zufriedenstellend eingestuft werden können. In Hinblick auf den praktischen Einsatz des Verfahrens in der Strukturdimensionierung sind die Ergebnisse zudem überwiegend konservativ, d.h. die Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  wird für  $M_\infty < 1.3$  tendenziell zu niedrig bestimmt. Ferner ließen sich die numerischen Ergebnisse von Hashimoto et al. [15] erfolgreich reproduzieren, was darauf schließen lässt, dass die Abweichungen zu den experimentellen Daten bei kleineren Machzahlen vielmehr in der physikalischen Modellbildung (z.B. Vernachlässigung einer Kavität) als in der numerischen Implementierung des Kopplungsalgorithmus begründet liegen.



## 5 Analyse der aeroelastischen Stabilität ebener Schalen

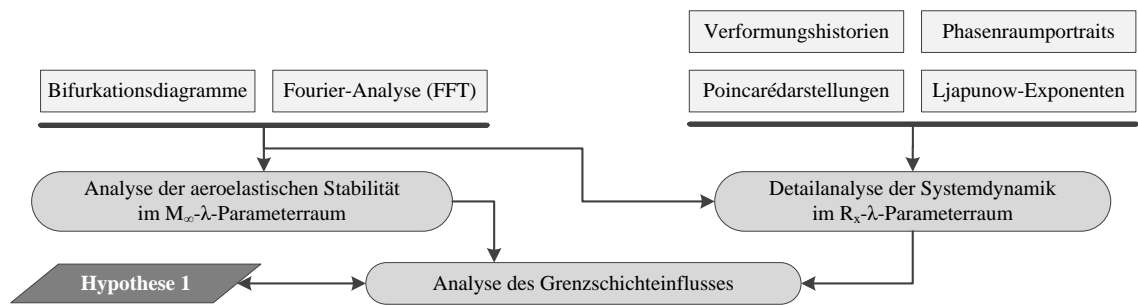


Abbildung 5.1: Übersicht zur Betrachtungsebene 1.

Ziel der folgenden Untersuchungen ist, den Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastische Stabilität ebener Schalen empirisch zu charakterisieren. Aufbauend auf dem Kenntnisstand der Wissenschaft, der in Abschnitt 5.1 zusammengefasst wird, beschäftigt sich Abschnitt 5.2 mit der quantitativen Analyse des Grenzschichteinflusses über einen Machzahlbereich von  $0,8 \leq M_\infty \leq 2$ . Dabei liegt der Fokus zunächst auf einer Charakterisierung der Systemdynamik im Bereich der Stabilitätsgrenzen (vgl. Abbildung 5.1). Auf Basis dieser Ergebnisse lässt sich anschließend der zu untersuchende Parameterraum für die detailliertere Analyse der instabilen Systemzustände in Abschnitt 5.3 eingrenzen. Mit Hilfe von Bifurkationsdiagrammen, frequenzbasierten Amplitudenspektren, Phasenraumportraits und Poincarédarstellungen (vgl. Abbildung 5.1) wird die Dynamik ebener Schalen in reibungsfreien und viskosen Strömungen analysiert und die erste Leithypothese dieser Arbeit überprüft.

### 5.1 Stand der Wissenschaft

In Kapitel 1 wurde bereits ein allgemeiner Überblick über die Forschungsaktivitäten zum Panelflattern seit den 1950er-Jahren gegeben, der an dieser Stelle in Bezug auf die aeroelastische Stabilität ebener Schalen konkretisiert werden soll. Im Bereich schallnaher Strömungen gelten die experimentellen Untersuchungen von Muhlstein et al. [9] und Gaspers et al. [96] noch heute als primäre Quelle für experimentelle Vergleichsdaten (vgl. Abschnitt 4.5). Mithilfe einer höhenverstellbaren Strahlteilerplatte variieren die Autoren die Dicke der turbulenten Grenzschicht an der Windkanalwand und stellen fest, dass ihr stabilisierender Einfluss in Bezug auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze insbesondere für  $M_\infty < 1,5$  signifikant ist. Zudem extrapolieren die Autoren aus den Messwerten den kritischen dynamischen Druck  $\lambda_{\text{krit}}$  in einer hypothetisch reibungsfreien Strömung. Diese Daten nutzt Dowell [53] für eine Validierung numerischer Lösungsansätze, die auf der linearisierten Potentialgleichung basieren, und kann in diesem Zusammenhang eine gute

Übereinstimmung der Ergebnisse nachweisen (vgl. Abbildung 1.2). Hinsichtlich reibungsbehafteter Strömungen wurde bereits im Rahmen der Validierung (vgl. Abschnitt 4.5.5) hervorgehoben, dass die als *shear-flow*-Theorie bezeichnete Erweiterung des potentialtheoretischen Lösungsansatzes um die Vorgabe eines Geschwindigkeitsprofils nach dem  $1/7$ -Potenzgesetz zu einer verbesserten Vorhersage der grenzschichtbehafteten Fälle führt. In Hinblick auf den Einfluss weiterer, insbesondere struktureller Einflussparameter (z.B. Streckungsverhältnis  $L/B$ , Einspannung, Massenverhältnis  $\mu$  etc.), kann aufgrund der Fokussierung dieser Arbeit auf aerodynamische Phänomene und der Vielzahl an Veröffentlichungen kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden. Für eine ausführliche Zusammenfassung der bedeutendsten Publikationen bis zum Jahr 1999 sei daher auf Johns [98] und Mei et al. [99] verwiesen.

Obwohl die wissenschaftliche Gemeinschaft die Signifikanz des Grenzschichteinflusses insbesondere in Bezug auf die aeroelastische Stabilitätsanalyse rechtwinkliger Schalen mit hohen Streckungsverhältnissen  $B/L$  erkannt hat, existieren bis dato wenig aktuelle Studien zu diesem Thema. Gordnier und Visbal [68] untersuchen mittels eines iterativ gestaffelten starken Kopplungsschemas die Auswirkungen laminarer Grenzschichten ( $Re = 10^5$  mit  $l_{\text{ref}} = L$ ) auf die aeroelastischen Eigenschaften ebener Schalen in schallnaher Strömung. Die gekoppelte Lösung der dreidimensionalen kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit der zweidimensionalen von-Kármán'schen Plattengleichung zeigt eine stärkere Zunahme des kritischen dynamischen Drucks  $\lambda_{\text{krit}}$ , als dies für turbulente Grenzschichten in den Studien von Hashimoto et al. [15] nachgewiesen werden konnte. Der qualitative Charakter, etwa die Reduktion der Schwingungsfrequenz, ist jedoch für laminare und turbulente Grenzschichtströmungen vergleichbar. Letztgenannte Autoren verwenden in [15] ebenfalls einen partitionierten Lösungsansatz für die Kopplung der RANS-Gleichung mit einer Finite-Differenzen-Lösung der von-Kármán'schen Plattengleichung. Die Validierung dieses Verfahrens anhand der experimentellen Daten von Muhlstein et al. [9] (vgl. Abschnitt 4.5) wird mittels zwei verschiedener Turbulenzmodelle nach Spalart-Allmaras und Baldwin-Lomax durchgeführt, wobei sich die Abweichungen in Bezug auf die Stabilitätsgrenze als vernachlässigbar klein herausstellen [15]. Der Einsatz des Verfahrens für höhere Machzahlen bis  $M_\infty \leq 2,4$  zeigt, dass zwischen Mach 1,4 und Mach 1,8 die reibungsfreien Stabilitätsgrenzen über jenen in viskosen Fluiden liegen und daher ein anfachender Charakter der turbulenten Grenzschicht vermutet werden kann. Bis dato ließ sich dieser Effekt in der Literatur jedoch nicht bestätigen. In Bezug auf höherwertigere Strömungsmodelle untersuchen Ostoich et al. [100] die Kopplung der zwei niedrigsten Eigenschwingungsformen in einer turbulenten Überschallströmung ( $M_\infty = 2,5$ ) mittels einer direkten numerischen Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen. Zwar erläutern die Autoren detailliert den transienten Prozess bis zur Ausbildung einer Grenzzyklusschwingung durch die Überlagerung wandernder Wellen, der dynamische Gleichgewichtszustand entspricht jedoch einer Grenzzyklusschwingung in Form stehender Wellen. Der dabei dominierende Anteil der ersten und zweiten Eigenschwingungsform lässt darauf schließen, dass die aeroelastische Instabilität auf den in Abschnitt 2.1 erläuterten Mechanismus des Mehr-Freiheitsgrad-Flutters zurückzuführen ist. Die Ergebnisse sind somit vergleichbar mit Lösungen auf Basis der RANS-Gleichungen.

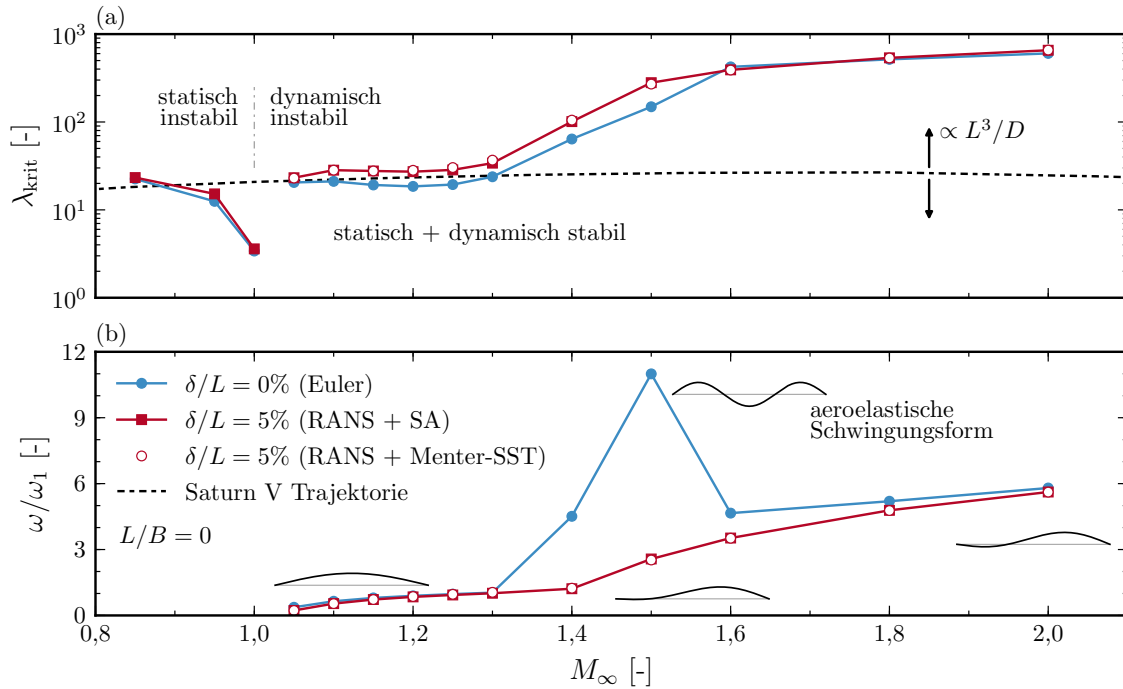
Im Kontext der nichtlinearen Dynamik ebener Schalen in den instabilen Zustandsräumen führt Dowell [94] Studien durch, die auf der *Piston*-Theorie nach Gleichung (3.53) basieren. Der numerische Lösungsaufwand ist im Vergleich zur linearisierten Potentialgleichung (3.47) gering und ermöglicht somit die für eine Charakterisierung nichtlinearer Systeme erforderliche Länge und Auflösung der Zeitbereichslösung. Zusammen mit der

nichtlinearen von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11) wird das resultierende System partieller Differentialgleichungen mittels eines modalen Galerkin-Verfahrens in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt und anschließend über einen monolithischen Kopplungsansatz gelöst. Auf diese Weise lassen sich numerische Einflussfaktoren, die aus den Eigenschaften partitionierter Kopplungsansätze resultieren (z.B. Interpolationsfehler), in der Ergebnisinterpretation ausschließen. Für bestimmte Kombination aus kompressiblen Membranlasten  $R_x$  und orthogonal wirkenden Luftkräften beobachtet Dowell [94] Systemzustände, die einen chaotischen Charakter aufweisen. Weiterführende Studien von Bolotin et al. [101] identifizieren in diesem Zusammenhang unterschiedliche Attraktoren, u.a. des periodischen und chaotischen Typus, und stellen einen signifikanten Einfluss der Anfangsbedingung auf die resultierende Systemantwort heraus. Pourtakdoust und Fazlzadeh [102] berücksichtigen als zusätzlichen Einflussparameter die Dämpfung der Struktur und beobachten einen Übergang von chaotischen zu periodischen Attraktoren, wenn jene Dämpfung zunimmt. Im Kontext neuerer Lösungsverfahren lösen Cheng und Mei [103] die von-Kármán'sche Plattengleichung mittels eines Finite-Elemente-Verfahrens unter Berücksichtigung kompressibler Membranlasten, die indirekt durch thermale Mechanismen initiiert werden. Die Ergebnisse entsprechen aus qualitativer Sicht jenen Bifurkationsstudien, in denen die Membranlasten  $R_x$  direkt vorgegeben werden. Xie et al. [16] gelingt es, über einen Modellansatz reduzierter Ordnung auf Basis der *Proper-Orthogonal-Decomposition*-Methode [104] mehrfach-periodische und chaotische Attraktoren zu reproduzieren. Die Autoren verwenden ihren Ansatz, um für verschiedene Streckungsverhältnisse ebener Schalen den Einfluss thermaler Lasten auf die gekoppelte Lösung zu studieren. Sie beobachten, dass eine Zunahme der thermalen Lasten sowohl mit einer Abnahme der Stabilitätsgrenze als auch mit einer Verschiebung des Bifurkationspunktes, der den Übergang aeroelastischen Beulens zu chaotischen Schwingungszuständen beschreibt, in Richtung höherer dynamischer Drücke  $\lambda$  korreliert. Vergleichbare Resultate finden sich in [94, 101–103, 105].

Die oben genannten Literaturquellen beziehen sich im Kontext der dynamischen Eigenschaften ebener Schalen in den aeroelastisch instabilen Zustandsräumen gänzlich auf eine quasistationäre Modellierung der instationären Luftkräfte nach Gleichung (3.53) und (3.54). Dies bedeutet nicht nur, dass die Viskosität des Fluids außer Acht gelassen wird, sondern auch, dass die Ergebnisse lediglich für einen hohen Machzahlbereich ( $M_\infty > \sqrt{2}$ ) gültig sind. Für den schallnahen Geschwindigkeitsbereich sind daher zunächst die dynamischen Eigenschaften ebener Schalen in reibungsfreien Fluiden zu charakterisieren, bevor der Einfluss turbulenter Grenzschichtströmungen bewertet werden kann.

## 5.2 Machzahl- und Grenzschichteinfluss auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze

Zunächst seien die aeroelastischen Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  zweidimensionaler Systeme mittels TAU-Python unter Verwendung des Strukturlösers Nastran bestimmt. Hierzu wird für eine konstante Machzahl  $M_\infty$  ein beliebiger dynamischer Druck  $\lambda$  vorgegeben und das aeroelastische System durch eine geringe Anregung der ersten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  gestört. Da das Abklingen einer solchen Störung nicht zwingend mit einer stabilen Lösung korreliert, sondern die Möglichkeit besteht, dass höher-harmonische Schwingungsanteile angefacht werden (vgl. Abschnitt 4.5), wird sich der Stabilitätsgrenze aus dem instabilen Zustandsbereich genähert ( $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{krit}}^+$ ) und stets bis zur Ausbildung des aeroelastischen



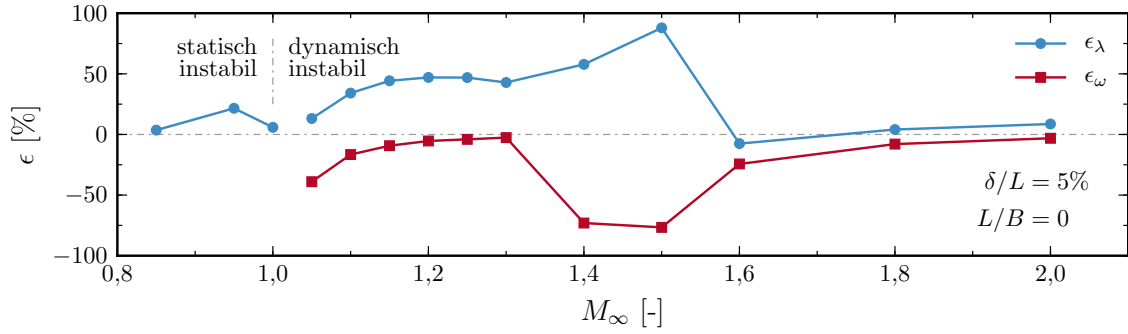
**Abbildung 5.2:** Gegenüberstellung aeroelastischer Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{krit}$  und Flutterfrequenzen  $\omega$  in reibungsfreier und reibungsbehafteter Strömung.

Gleichgewichts gerechnet. Anschließend lässt sich mittels einer Bifurkationsstudie (Auftragung der Schwingungsamplitude  $|\hat{w}|$  über  $\lambda$ , vgl. Abbildung 4.12) die Stabilitätsgrenze  $\lambda_{krit}$  aus dem Übergang des Zustandes  $|\hat{w}| = 0$  zu  $|\hat{w}| > 0$  ableiten.

*Bemerkung 5.1:* Die Erkenntnisse zahlreicher Literaturquellen (z.B. [68, 89, 106]) legen nahe, dass sich das dynamisch instabile Systemverhalten durch stabile Grenzzyklusschwingungen oberhalb der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{krit}$  charakterisieren lässt (superkritische Hopf-Bifurkation; vgl. Abbildung 4.12 in Abschnitt 4.5). Dies rechtfertigt den oben beschriebenen Ansatz zur Bestimmung von  $\lambda_{krit}$ .

*Bemerkung 5.2:* Das Massenverhältnis  $\mu$  nach Gleichung (2.21) sei im Folgenden mit  $\mu = 0,1$  als konstant angenommen. Dies fördert die Vergleichbarkeit mit einer Vielzahl der in Abschnitt 5.1 vorgestellten Literaturquellen und ist konsistent zu den vorangegangenen Untersuchungen.

Zur Untersuchung der reibungsbehafteten Strömungen sei eine Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 5\%$  vorgegeben. Dieser Wert liegt in der Größenordnung des Verhältnisses einer typischen turbulenten Grenzschichtdicke ( $\delta \approx 6$  cm) [107] zur überströmten Körperlänge einer aerodynamischen Stufenverkleidung von Trägerraketen ( $L \approx 2,5$  m bei einer Ariane V [24]). Abbildung 5.2(a) stellt die aeroelastische Stabilitätsgrenze  $\lambda_{krit}$  in einer reibungsfreien und reibungsbehafteten Strömung einander gegenüber. Im Bereich subsonischer Machzahlen wird in beiden Fällen aeroelastisches Beulen als dominante Instabilität identifiziert. Ein quantitativer Vergleich der Ergebnisse über die prozentuale Abweichung  $\epsilon_\lambda$  zwischen der viskosen und reibungsfreien Stabilitätsgrenze (Abbildung 5.3) zeigt in diesem Zusammenhang, dass die turbulente Grenzschicht das Einsetzen des aeroelastischen Beulens geringfügig in Richtung höherer dynamischer Drücke  $\lambda$  verschiebt.



**Abbildung 5.3:** Abweichungen  $\epsilon$  zwischen reibungsbehafteten und reibungsfreien aeroelastischen Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  und Flutterfrequenzen  $\omega$ .

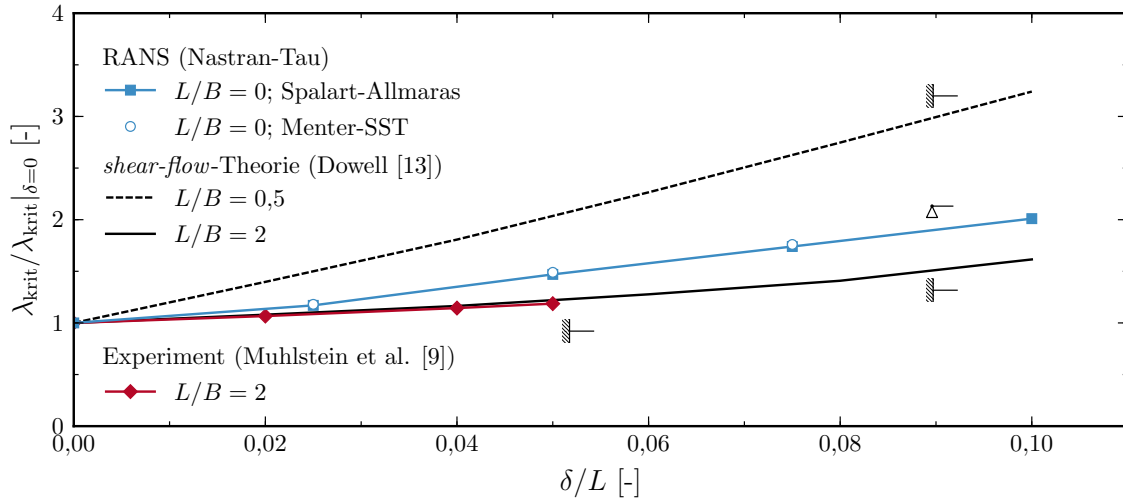
Deutlich größer fällt die Zunahme von  $\lambda_{\text{krit}}$  im Bereich niedriger supersonischer Machzahlen  $M_\infty$  aus. Die resultierende Instabilität ist in diesem Fall stets dynamischer Natur und der kritische dynamische Druck  $\lambda_{\text{krit}}$  weicht um bis zu 47 % vom reibungsfreien Vergleichswert ab. Abbildung 5.2(b) zeigt die entsprechenden Flutterfrequenzen, die auf die niedrigste Eigenfrequenz der ebenen Schale im Vakuum  $\omega_1$  normiert sind, sowie die dazugehörigen Schwingungsformen für  $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{krit}}^+$ . Unabhängig von der Grenzschicht werden im Bereich  $1,05 \leq M_\infty \leq 1,3$  Oszillationen der niedrigsten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  mit leicht reduzierten Frequenzen ( $\omega/\omega_1 < 1$ ) beobachtet. Hierbei handelt es sich um den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Mechanismus des Ein-Freiheitsgrad-Flutterns. Die damit einhergehende Reduktion der Flutterfrequenz  $\omega$  durch die Präsenz einer Grenzschicht ist für  $M_\infty = 1,05$  am ausgeprägtesten und nähert sich für  $M_\infty \rightarrow 1,3$  dem reibungsfreien Wert an (vgl.  $\epsilon_\omega$  in Abbildung 5.3).

Anschließend sei für  $M_\infty = 1,2$  die Grenzschichtdicke  $\delta$  im Bereich  $2,5 \% \leq \delta/L \leq 10 \%$  variiert. Abbildung 5.4 zeigt, dass zwischen der aeroelastischen Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  und der Grenzschichtdicke  $\delta$  ein linearer Zusammenhang besteht, wobei der Proportionalitätsfaktor von dem Streckungsverhältnis der Schale und ihren geometrischen Randbedingungen abhängt, woraus die Abweichungen zwischen den abgebildeten Lösungskurven resultieren. Dieser lineare Zusammenhang zeigt sich ebenfalls in den experimentellen Ergebnissen von Muhlstein et al. [9]. Lediglich die Lösung der reibungsfreien Konfiguration weicht etwas von diesem Trend ab. Numerische Lösungen auf Basis der *shear-flow*-Theorie bestätigen den linearen Zusammenhang für verschiedene Streckungsverhältnisse ( $L/B = 0,5$  und  $L/B = 2$ ) einer fest eingespannten Schale [11].

*Bemerkung 5.3:* Dowell [11] zeigt mittels der *shear-flow*-Theorie, dass im niedrigen Überschall bei sehr großen Grenzschichtdicken (in der Größenordnung  $\delta/L \approx 25 \%$ ) das dynamische System in den Zustand des aeroelastischen Beulens übergehen kann. In Hinblick auf den für praktische Anwendungen kritischeren Fall dynamischer Instabilitäten sei der Fokus jedoch weiterhin auf moderate Grenzschichtdicken gerichtet.

Eine weitere Erhöhung der Machzahl  $M_\infty$  führt zu einer signifikanten Abweichung der reibungsfreien und reibungsbehafteten Lösungen. Jene nimmt für  $M_\infty = 1,5$  einen Maximalwert von annähernd  $\epsilon_\lambda \approx 90 \%$  an. Dies korreliert mit der Anfachung einer hochfrequenten Schwingung, die von der dritten Eigenschwingungsform  $\psi_3$  dominiert wird (vgl. Abbildung 5.2(b)). Ein solches Ergebnis entspricht den Beobachtungen von Gordnier und Visbal [68] und wurde in Abschnitt 4.5 (vgl. Abbildung 4.13) einer Validierung unterzogen. Einer Veröffentlichung dieser Ergebnisse [108] folgend wurde dieses Phänomen zudem von





**Abbildung 5.4:** Linearer Zusammenhang zwischen der aeroelastischen Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  und der Grenzschichtdicke  $\delta$ .

Shishaeva et al. [109] numerisch bestätigt und über eine weiterführende Analyse der generalisierten Freiheitsgrade im Frequenzbereich dem Mechanismus des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns zugeordnet. Darüber hinaus lassen sich die hochfrequenten Schwingungen auch mit Taifun auf Basis der linearisierten Potentialgleichung (3.47) reproduzieren. Die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht führt indessen zu einer deutlichen Reduktion der Flatterfrequenz  $\omega$  (vgl.  $\epsilon_\omega$  in Abbildung 5.3). Dabei zeigt sich, dass die reibungsbehaftete Lösung wieder von der ersten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  dominiert wird, im Vergleich zu niedrigeren Machzahlen  $M_\infty \leq 1,3$  der Einfluss höher-harmonischer Anteile jedoch etwas zugenommen hat. An dieser Stelle genüge der empirische Nachweis des stabilisierenden Einflusses hochfrequenter Ein-Freiheitsgrad-Schwingungen. In Kapitel 6 wird auf diese Erkenntnis im Kontext einer phänomenologischen Betrachtung des zugrundeliegenden Mechanismus zurückgegriffen.

Im hohen Machzahlbereich (d.h.  $M_\infty \geq 1,6$ ) lassen sich die dynamischen Instabilitäten sowohl für die reibungsfreien als auch die reibungsbehafteten Konfigurationen durch eine Koaleszenz der zwei niedrigsten Eigenschwingungsformen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  beschreiben. Dieser Mechanismus wurde in den theoretischen Vorbetrachtungen (vgl. Abschnitt 2.1) trotz der vereinfachten aerodynamischen Modellannahmen nachgewiesen (vgl. Abschnitt 2.1). Daraus lässt sich schlussfolgern, dass der Einfluss aerodynamisch nichtlinearer Phänomene auf die Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  und auf die aeroelastische Schwingungsform mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  abnimmt. Interessanterweise lässt sich für  $M_\infty = 1,6$  ein kleiner Bereich identifizieren, in dem die turbulente Grenzschicht scheinbar einen destabilisierenden Charakter aufweist. Dies entspricht den Beobachtungen von Hashimoto et al. [15], jedoch in deutlich abgeschwächter Form.

Ein zusammenfassender Vergleich der reibungsbehafteten Lösungen verdeutlicht, dass über den gesamten Machzahlbereich die Ergebnisse auf Basis des SA- und des Menter-SST-Turbulenzmodells sehr gut übereinstimmen (vgl. Abbildung 5.2). Abbildung 5.4 zeigt zudem, dass der lineare Zusammenhang zwischen der aeroelastischen Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  und der Grenzschichtdicke  $\delta$  von beiden Turbulenzmodellen nahezu identisch wiedergegeben wird. Die Sensitivität der aeroelastischen Stabilitätsgrenze auf die in Anhang B detaillierter vorgestellten Turbulenzmodelle kann folglich als gering eingestuft werden.

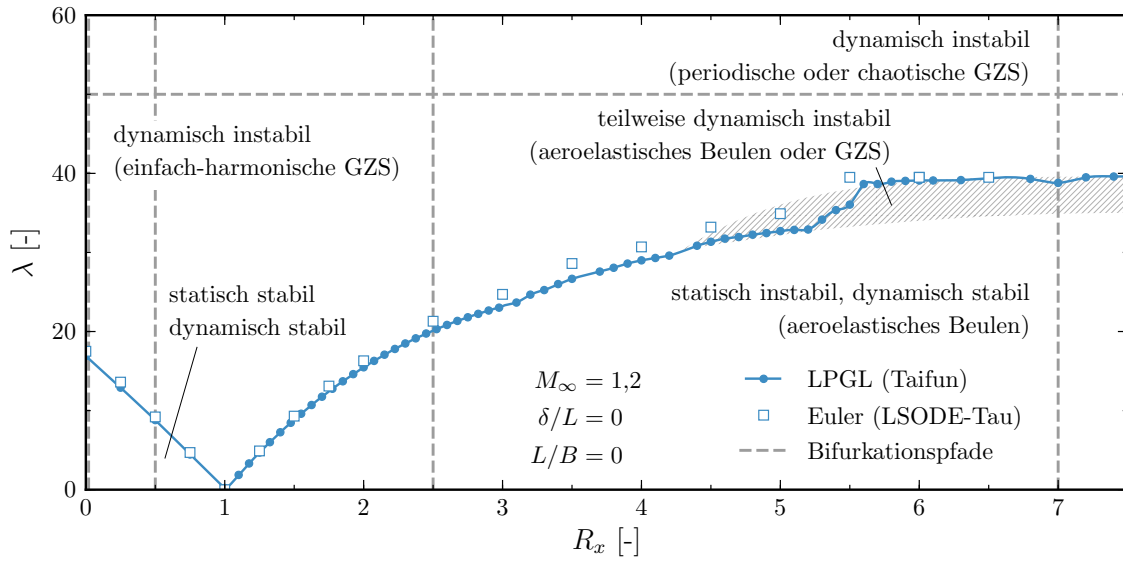


Die Ergebnisse zeigen zudem, dass sämtliche Mechanismen, die im Rahmen der Validierung dreidimensionaler Panelflatter-Konfigurationen identifiziert werden konnten (vgl. Abschnitt 4.5), qualitativ ebenso in den Analysen zweidimensionaler Systeme wiederzufinden sind. Diese Erkenntnis ist für die folgenden Untersuchungen wichtig, da die zweidimensionalen Systeme aufgrund der geringeren Anzahl an diskretisierten Freiheitsgraden deutlich geringere Lösungszeiten erfordern und somit umfangreichere Parameterstudien ermöglichen. Daher sei der Einfluss von Querstromeffekten und der seitlichen Einspannung zunächst vernachlässigt.

In Hinblick auf eine weitere Reduktion des zu untersuchenden Parameterraumes zeigt Abbildung 5.2 die in Abschnitt 1.2 eingeführte Trajektorie der Trägerrakete Saturn V. Für den betrachteten Machzahlbereich  $0,8 \leq M_\infty \leq 2$  lässt sich dem Flugprotokoll der Mission AS-512 („Apollo 17“) [25] der dynamische Druck  $q_\infty$  entnehmen und nach Gleichung (2.20) in den aeroelastischen Ähnlichkeitsparameter  $\lambda$  überführen. Hierbei ist eine Erhöhung (bzw. Senkung) des frei gewählten, über die Machzahl  $M_\infty$  konstanten Strukturparameter-Verhältnisses  $L^3/D$  gleichbedeutend mit einer Erhöhung (bzw. Senkung) des dynamischen Drucks  $q_\infty$  und führt zu einer parallelen Verschiebung der resultierenden  $\lambda$ -Kurve in positive (bzw. negative) Richtung entlang der Abszisse. Im Fall der in den vorangegangenen Untersuchungen betrachteten ebenen Schale, die bei einer gegebenen Länge  $L$  und Steifigkeit  $D$  hypothetisch den Strömungsverhältnissen beim Start einer Saturn V ausgesetzt ist, wird der kritische dynamische Druck, bei dem das System dynamischen Instabilitäten unterliegen kann, als erstes bei  $M_\infty \approx 1,2$  überschritten. Aus der anwendungsorientierten Perspektive ist die analoge Interpretation von Bedeutung, dass für einen gegebenen dynamischen Druck  $q_\infty$  eine kritische maximale Länge  $L_{\text{krit}}$  der Struktur nicht überschritten respektive eine kritische minimale Steifigkeit  $D_{\text{krit}}$  nicht unterschritten werden darf, um die aeroelastische Stabilität in diesem Bereich zu gewährleisten. Eine aus der Berücksichtigung der turbulenten Grenzschicht resultierende Erhöhung der aeroelastischen Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  erlaubt in diesem Zusammenhang jedoch,  $D_{\text{krit}}$  zu senken oder  $L_{\text{krit}}$  zu erhöhen. Wenngleich eine belastbare wirtschaftliche Analyse in Hinblick auf die Forschungsfrage der vorliegenden Abhandlung nicht zielführend ist, deutet das vorangegangene Beispiel mit einer prozentualen Erhöhung der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}|_{M_\infty=1,2}$  um  $\approx 50\%$  (vgl. Abbildung 5.3) auf ein nicht unerhebliches Einsparungspotential im niedrigen Überschallbereich hin.

### 5.3 Detailanalyse der Dynamik im instabilen Zustandsbereich

Bei der Bestimmung aeroelastischer Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  kann aufgrund der infinitesimal kleinen Verformungen ( $\hat{w}/h \rightarrow 0$ ) davon ausgegangen werden, dass die nichtlinearen Terme der strukturdynamischen Modellgleichungen keinen Einfluss auf die Gesamtlösung haben. Diese Annahme ist jedoch in den statisch und dynamisch instabilen Zustandsbereichen des  $M_\infty$ - $\lambda$ -Parameterraumes nicht mehr gerechtfertigt. So beeinflusst die geometrisch nichtlineare Biege-Dehn-Kopplung bereits bei Verformungsamplituden in der Größenordnung  $\hat{w}/h > 0,3$  signifikant die Systemdynamik (vgl. Abbildung 4.9(a)). Um diese ausführlich unter Berücksichtigung der Präsenz turbulenter Grenzschichten charakterisieren zu können, konzentrieren sich die folgenden Untersuchungen auf schallnahe Strömungen bei  $M_\infty = 1,2$ .



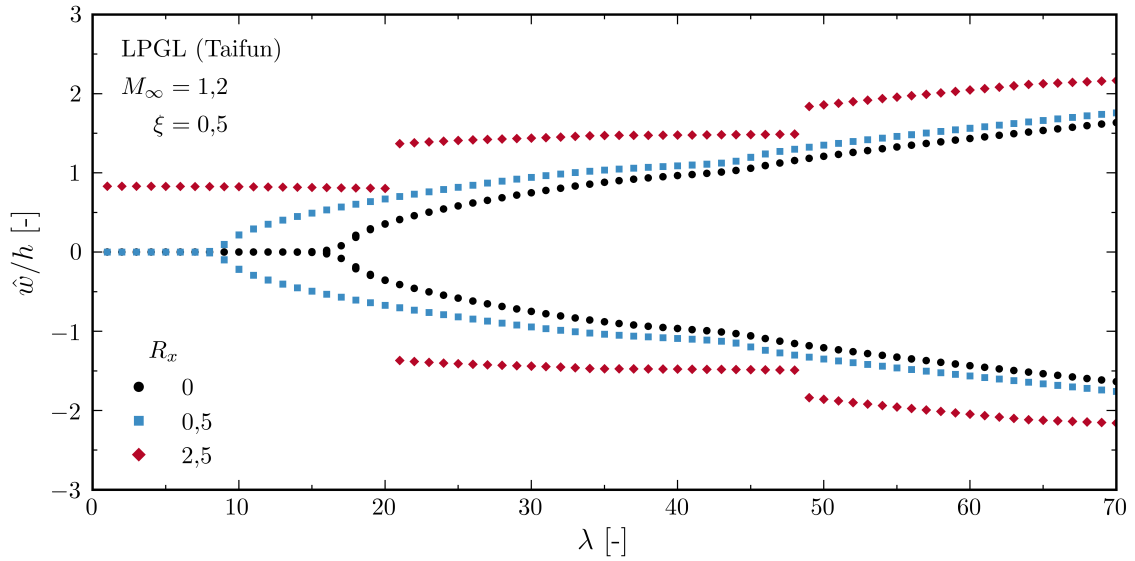
**Abbildung 5.5:** Stabilitätsbereiche einer ebenen Schale mit Membranlast  $R_x$  bei  $M_\infty = 1,2$ .

Die zusätzliche Berücksichtigung einer statischen Membranbelastung  $R_x$  ist sowohl von theoretischer als auch praktischer Relevanz. Durch eine gezielte Variation der Parameter  $\lambda$  und  $R_x$  lassen sich verschiedenste Attraktortypen generieren, um anschließend den Einfluss turbulenter Grenzschichten auf diese zu untersuchen. Im Hinblick auf die praktische Relevanz ist anzumerken, dass aerodynamische Verkleidungen im Regelfall zum Lasttransfer beitragen (vgl. Kapitel 1) und somit  $R_x \neq 0$  ist. Darüber hinaus können auch thermisch bedingte Materialdehnungen zu einer Membranbelastung führen (vgl. Abschnitt 5.1). Im Folgenden sind nach Gleichung (2.23) nur positive Werte für  $R_x$ , d.h. druckbelastete Schalen, von Interesse, da Zuglasten ( $R_x < 0$ ) stets stabilisierend wirken.

Da eine detaillierte Parameterstudie mit TAU-Python äußerst rechenintensiv ist, werden vorab mittels Taifun interessante Parameterkombinationen über die Lösung der linearisierten Potentialgleichung (3.47) und der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11) identifiziert. Indem die von-Kármán'sche Plattengleichung ebenfalls bei der Lösung mit TAU-Python angewendet wird, lässt sich abschließend der Einfluss der aerodynamischen Modellierungsansätze auf das aeroelastische System analysieren.

### 5.3.1 Identifikation der Stabilitätsbereiche

Abbildung 5.5 zeigt die verschiedenen Stabilitätsbereiche des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes für eine reibungsfreie Strömung bei Mach 1,2. Da für  $\hat{w}/h \rightarrow 0$  die Lösungen der linearisierten Potentialgleichung (3.47) mit jenen der Euler-Gleichungen (3.40) übereinstimmen müssen, weisen die Ergebnisse in Abbildung 5.5 auf eine korrekte Implementierung des Kopplungsalgorithmus in Taifun und TAU-Python hin. Abweichungen im Bereich hoher Membranlasten  $R_x$  und hoher aerodynamischer Lasten  $\lambda$  können aus der Tatsache resultieren, dass die Strukturdeformationen  $w(\xi, \tau)$  im Zustand des aeroelastischen Beulens sowie im dynamisch instabilen Zustandsbereich nicht mehr als klein angesehen werden können. Folglich kommen zunehmend aerodynamisch nichtlineare Kompressibilitätseffekte, die in den Euler-Gleichungen (3.40) berücksichtigt werden, zum Tragen.

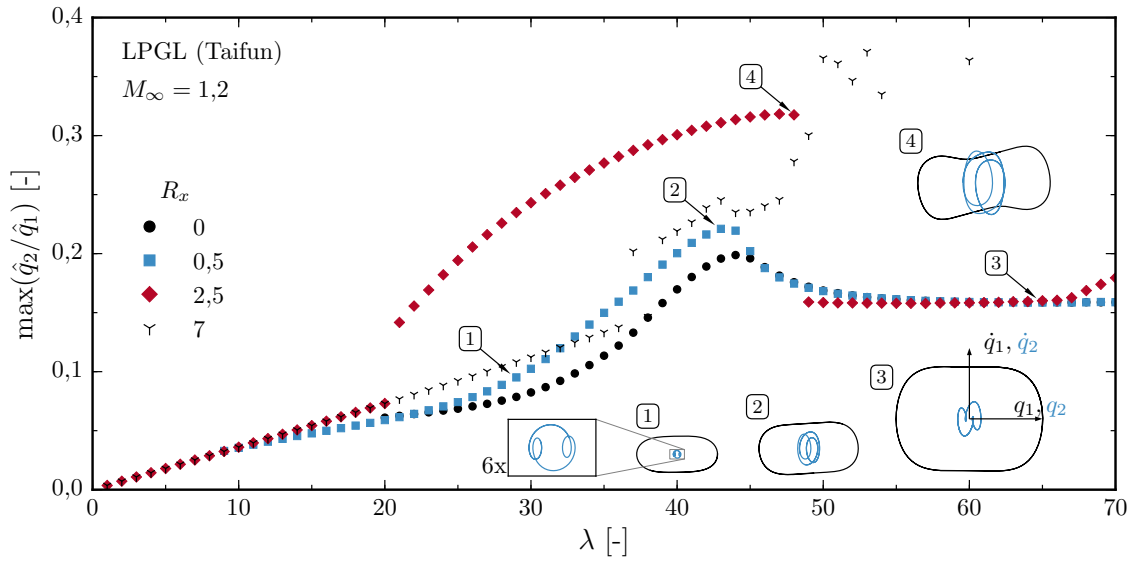


**Abbildung 5.6:** Bifurkationsdiagramme für variierende dynamische Drücke  $\lambda$  bei konstanter Membranlast  $R_x$ .

Eine ähnliche Einteilung der Stabilitätsbereiche erfolgte bereits im Rahmen der Verfahrensvalidierung in Abschnitt 4.5 für  $M_\infty = 2$ . Ein Vergleich der Ergebnisse deckt hierbei qualitative Unterschiede auf (vgl. Abbildungen 4.15 und 5.5): Für kleine dynamische Lasten  $\lambda$  und Membranlasten  $R_x$  kommt es, analog zu  $M_\infty = 2$ , zu einer linearen Abnahme der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit.}}$ . Jene strebt nun jedoch für  $R_x \rightarrow 1$  (kritische Beullast der ebenen Schale im Vakuum) gegen Null, wodurch dynamische Instabilitäten bereits bei sehr niedrigen dynamischen Drücken  $\lambda$  initiiert werden können. Im Bereich großer Membranlasten ( $R_x > 4$ ) ist die exakte Bestimmung der Stabilitätsgrenze schwierig, da das Auftreten statischer (sogenannte Punktattraktoren) und dynamischer Lösungen (periodische Attraktoren) in diesem Bereich signifikant von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt. Vergleichbare Studien von Bolotin et al. [101] weisen in diesem Zusammenhang eine enge Nachbarschaft verschiedener Attraktortypen in den Phasenraumportraits der ersten beiden modalen Freiheitsgrade  $q_1$  und  $q_2$  (Attraktorbecken) nach. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bestätigen diese Erkenntnisse für schallnahe Strömungen. Die Koexistenz von Punkt- und periodischen Attraktoren ist daher in Abbildung 5.5 als grauschattierter Bereich gekennzeichnet. Ähnliche Phänomene lassen sich bei einer weiteren Erhöhung von  $\lambda$  beobachten. So ist es nicht möglich, klar abgegrenzte Bereiche des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes zu identifizieren, in denen allein periodische oder allein nicht-periodische (chaotische) Attraktoren auftreten. Dies ist vergleichbar mit der unregelmäßigen Verteilung periodischer und chaotischer Attraktoren in den von Bolotin et al. [101] studierten Attraktorbecken. Um bei langen Einschwingphasen (Transienten) eine Missinterpretation der Attraktoren zu vermeiden, werden die potentialtheoretischen Lösungen über eine Zeitspanne von  $\tau_{\text{end}} \geq 2,5 \cdot 10^4$  bestimmt. Die höheren Rechenanforderungen des TAU-Python-Verfahrens limitieren  $\tau_{\text{end}}$  jedoch auf kleinere Werte.

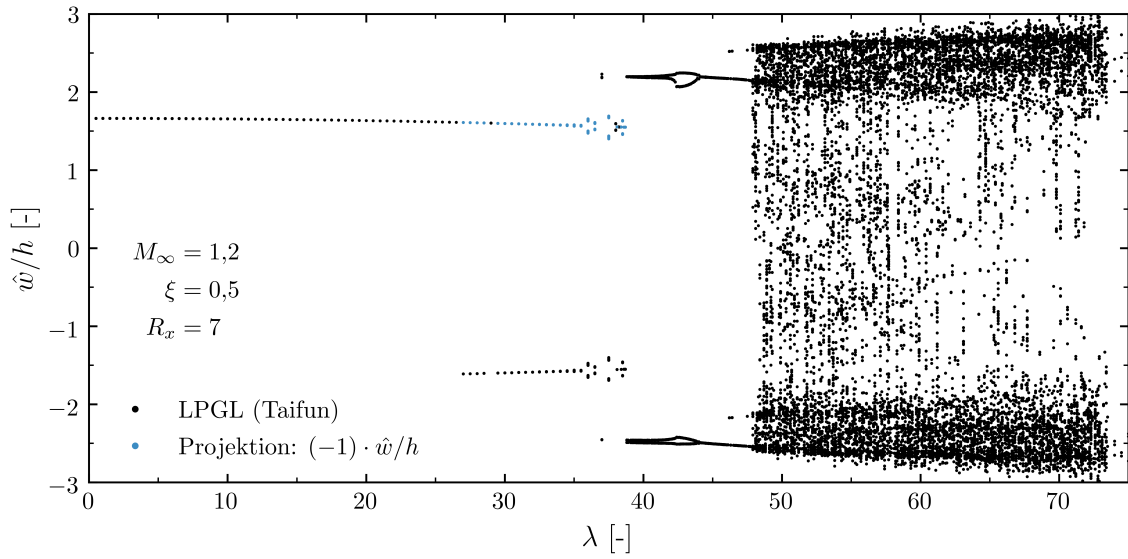
### 5.3.2 Bifurkationsanalysen

Um ein besseres Verständnis von der Systemdynamik in den instabilen Stabilitätsbereichen zu erlangen, werden die Kontrollparameter  $R_x$  und  $\lambda$  im Rahmen von sechs Bifurkations-



**Abbildung 5.7:** Beteiligung modaler Freiheitsgrade für variierende dynamische Drücke  $\lambda$  bei konstanter Membranlast  $R_x$ .

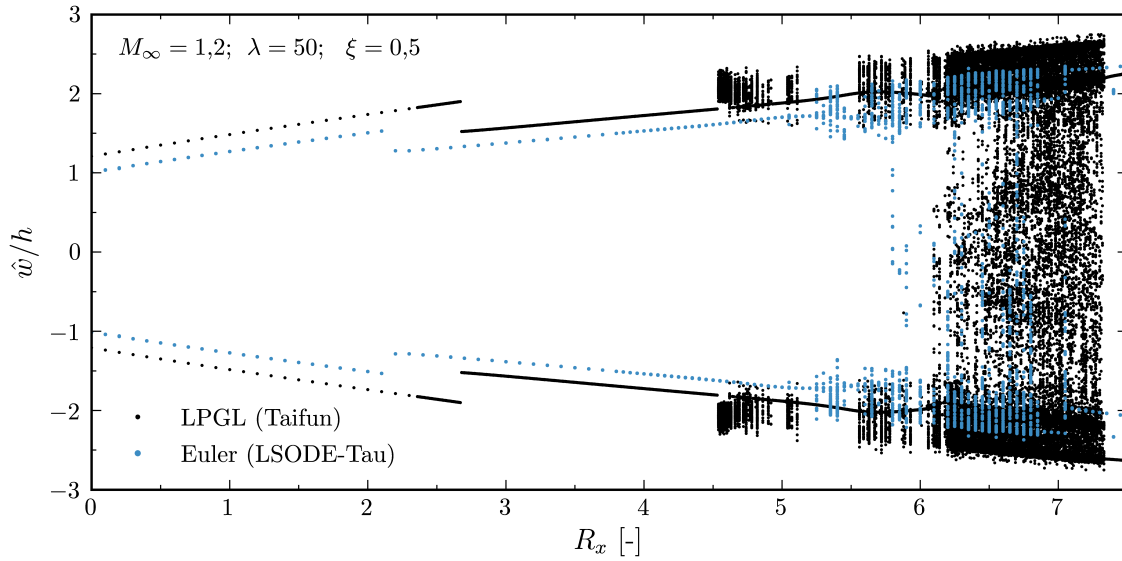
analysen derart variiert, dass möglichst alle Arten statischer und dynamischer Instabilitäten erfasst werden. Die grau gestrichelten Linien in Abbildung 5.5 veranschaulichen die hierfür gewählten Parametervariationen. Für diese werden die entsprechenden Bifurkationsdiagramme aus den lokalen Schwingungsamplituden  $\hat{w}/h$  an der Position  $\xi = 0,5$  abgeleitet. Für einen vorgegebenen Wert des Kontrollparameters  $R_x$  oder  $\lambda$  kennzeichnen zwei Lösungswerte eine einfach-periodische Schwingung und vier Lösungswerte eine zweifach-periodische Schwingung. Folglich deutet eine irreguläre Verteilung der Lösungswerte auf einen nicht-periodischen Attraktor hin. Abbildung 5.6 zeigt drei Bifurkationsdiagramme für eine jeweils konstante Membranlast von  $R_x = 0, 0,5$  und  $2,5$ . Der stabile Zustand (unverformte ebene Schale) wird durch  $\hat{w}/h = 0$  repräsentiert. Bei einer Erhöhung des dynamischen Drucks  $\lambda$  geht das System in eine einfach-periodische Grenzzyklusschwingung über (Hopf-Bifurkation). Ein weiteres Erhöhen von  $\lambda$  korreliert mit einer nominellen Zunahme der lokalen Schwingungsamplituden  $\hat{w}$ . Überschreitet die Membranlast den Wert  $R_x = 1$ , tritt für kleine  $\lambda$ -Werte zunächst aeroelastisches Beulen auf (vgl.  $R_x = 2,5$  in Abbildung 5.6). In den dynamisch instabilen Bereichen weisen die Bifurkationskurven der vergleichsweise geringen Membranlasten  $R_x = 0$  und  $0,5$  eine auffällige Änderung ihres Gradienten  $\partial\hat{w}/\partial\lambda$  bei  $\lambda \approx 45$  auf, während für den Fall der hohen Membranlast  $R_x = 2,5$  sogar eine diskontinuierliche Änderung der Schwingungsamplituden  $\hat{w}$  bei  $\lambda \approx 49$  beobachtet wird. Um dieses Phänomen besser zu verstehen, seien die an der Schwingung beteiligten Freiheitsgrade in generalisierten Koordinaten analysiert. Abbildung 5.7 stellt die Maxima des modalen Amplitudenverhältnisses  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  über  $\lambda$  dar (die Lösungen für  $R_x = 7$  werden an späterer Stelle separat diskutiert). Es zeigt sich, dass die Oszillationen von der ersten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  dominiert werden, die zweite Eigenschwingungsform  $\psi_2$  jedoch insbesondere für große Membranlasten  $R_x$  mit bis zu  $\hat{q}_2/\hat{q}_1 \approx 40\%$  signifikant an der Gesamtlösung beteiligt ist. Die Anteile der dritten Eigenschwingungsform  $\hat{q}_3/\hat{q}_1$  sind hingegen um etwa eine Größenordnung kleiner als  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  und werden daher nicht in Abbildung 5.7 dargestellt. Im Bereich der statischen Instabilität (aeroelastisches Beulen) nimmt  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  linear mit  $\lambda$  zu. Die dynamischen Instabilitäten sind indessen durch einen nichtlinearen Anstieg mit einem Maximum bei  $\lambda \approx 45$  gekennzeichnet. Es deutet sich an, dass höhere



**Abbildung 5.8:** Bifurkationsdiagramm für variierende dynamische Drücke  $\lambda$  bei konstanter Membranlast  $R_x = 7$ .

Membranlasten  $R_x$  mit einer höheren Beteiligung der zweiten Eigenschwingungsform  $\psi_2$  korrelieren. Um dies zu verdeutlichen, zeigt Abbildung 5.7 zusätzlich vier identisch skalierte Phasenraumportraits, anhand derer sich mehrfach-periodische Attraktoren der zweiten generalisierten Koordinate  $q_2$  identifizieren lassen. Die plötzliche Abnahme von  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  für  $R_x = 2,5$  korreliert mit der in Abbildung 5.6 gezeigten diskontinuierlichen Änderung der lokalen Schwingungsamplitude  $\hat{w}$ . Anschließend wird die Gesamtlösung wieder stärker von der ersten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  dominiert (vgl. Abbildung 5.7). Die entsprechenden Phasenraumportraits im Bereich  $50 < \lambda < 65$  ähneln sich einander qualitativ. Ein erneuter Anstieg von  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  für  $\lambda > 65$  und  $R_x = 2,5$  ist durch einen Symmetrieverlust des Attraktors der zweiten generalisierten Koordinate  $q_2$  im Phasenraum gekennzeichnet (in Abbildung 5.7 nicht dargestellt).

In Analogie zu den bisherigen Bifurkationsstudien zeigt Abbildung 5.8 eine Variation des Kontrollparameters  $\lambda$  bei hohen Membranlasten, die exemplarisch durch  $R_x = 7$  repräsentiert sind. Im Bereich kleiner dynamischer Drücke  $\lambda$  ist das System statisch instabil und geht nach einer Störung in eine von zwei existierenden stationären Gleichgewichtslösungen über (aeroelastisches Beulen). Jene sind zueinander symmetrisch bezüglich des unverformten Zustands ( $w(\xi) = 0$ ). Welcher dieser beiden Zustände sich einstellt, ist von der Anfangsbedingung abhängig. Abbildung 5.8 verdeutlicht den symmetrischen Charakter der Lösungen, indem der Betrag der negativen Amplituden  $\hat{w}/h < 0$  blau markiert den positiven Amplituden  $\hat{w}/h > 0$  gegenübergestellt wird. Einen mathematischen Nachweis dieser Symmetrie liefert Xie et al. [110] für ein vergleichbares System unter Verwendung der *Piston*-Theorie. Die abwechselnd positiven und negativen Auslenkungen im Bereich der Stabilitätsgrenze deuten wieder auf die von Bolotin et al. [101] nachgewiesene hohe Sensitivität der Lösung bezüglich der Anfangsbedingung hin. Eine weitere Erhöhung der aerodynamischen Lasten  $\lambda$  führt zunächst dazu, dass um den gebeulten Zustand einfach-periodische Schwingungen einsetzen. Für  $\lambda > 37$  lassen sich dynamische Instabilitäten in Form einfach- oder zweifach-periodischer Grenzzyklusschwingungen beobachten. Anschließend weist die unregelmäßige Verteilung der lokalen Amplituden  $\hat{w}$  für  $\lambda > 48$  auf einen nicht-periodischen Charakter der Lösungen hin. Dennoch lässt sich aus der Vertei-

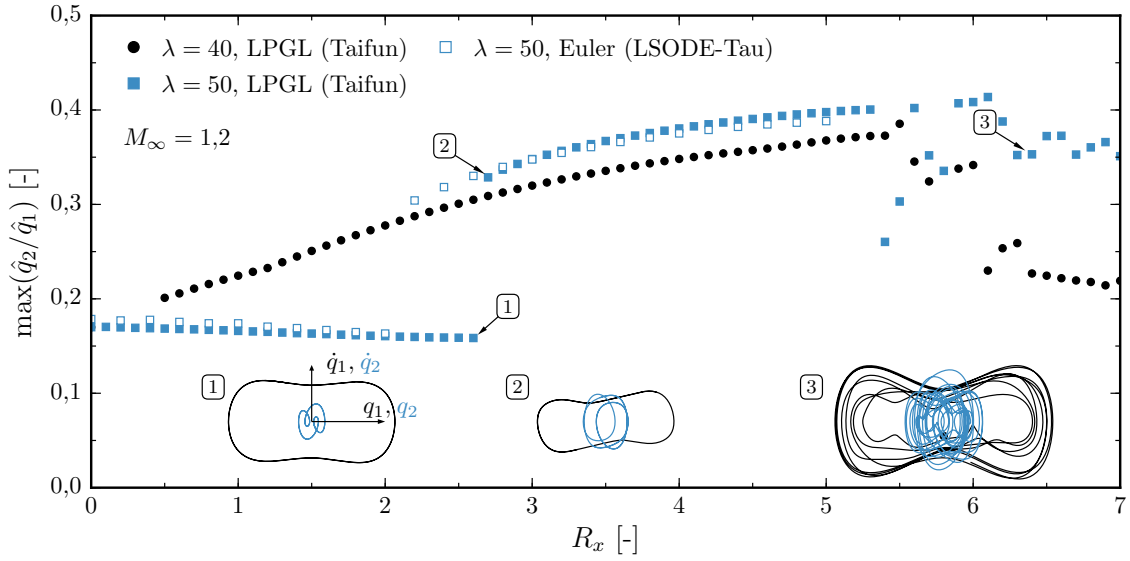


**Abbildung 5.9:** Bifurkationsdiagramm für variierende Membranlasten  $R_x$  bei einem konstantem dynamischen Druck  $\lambda = 50$ .

lungsdichte der Lösungspunkte ein symmetrischer Charakter bezüglich des unverformten Zustands ableiten. Eine Analyse der modalen Lösungsanteile in Abbildung 5.7 trägt darüber hinaus wieder zu einem besseren Verständnis der Systemdynamik bei. Der Zustand aeroelastischen Beulens ist im Vergleich zu  $R_x = 2,5$  bis zu einem deutlich höheren dynamischen Druck von  $\lambda \leq 36$  präsent (vgl. Abbildungen 5.6 und 5.8), wobei sich die gleiche lineare Abhängigkeit zwischen  $\lambda$  und dem Amplitudenverhältnis  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  zeigt. Die Grenzzyklosschwingung ist wieder geprägt von einer deutlichen Beteiligung der zweiten Eigenschwingungsform  $\psi_2$ . Für  $\lambda > 48$  korreliert der nicht-periodische Lösungscharakter mit einer unregelmäßigen Verteilung der Amplitudenverhältnisse  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$ . Diese sind jedoch stets kleiner als 0,4.

Abschließend sei die Membranlast  $R_x$  als Kontrollparameter gewählt und der dynamische Druck  $\lambda = 50$  konstant gehalten. Das Bifurkationsdiagramm in Abbildung 5.9 zeigt, dass hierbei die lokalen Amplituden  $\hat{w}$  bei einer Zunahme der Membranlast  $R_x$  wieder diskontinuierlich ansteigen. Für  $R_x > 4,5$  gehen die Lösungen von einfach-periodischen Schwingungen in vereinzelt auftretende nicht-periodische Schwingungen über. Abbildung 5.10 zeigt in diesem Zusammenhang die modalen Amplitudenverhältnisse  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  in Abhängigkeit von  $R_x$ . Diesen werden zudem den Lösungen für  $\lambda = 40$  gegenübergestellt. Ein Vergleich offenbart, dass die Kombination aus hohen dynamische Drücken  $\lambda$  und kleinen Membranlasten  $R_x$  zunächst mit einer ausgeprägten Dominanz der ersten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  korreliert. Ab einem Grenzwert von  $R_x > 2,6$  verstärkt die Membranlast  $R_x$  jedoch die Ausprägung der zweiten Eigenschwingungsform  $\psi_2$  und die Lösung geht qualitativ in jene für niedrigere dynamische Drücke  $\lambda$  über. Die Phasenraumportraits der korrespondierenden Attraktoren (gekennzeichnet durch die Nummerierung 1 und 2 in Abbildung 5.10) illustrieren das Schwingungsverhalten beim Überschreiten der Amplitudendiskontinuität. Die Amplitude der ersten generalisierten Koordinate  $\hat{q}_1$  wird relativ zu  $\hat{q}_2$  deutlich reduziert und der Attraktor verliert seine Achsensymmetrie im Phasenraum. Gleichzeitig nimmt die Amplitude der zweiten generalisierten Koordinate  $\hat{q}_2$  zu. Dieser Trend setzt sich mit zunehmender Membranlast  $R_x$  solange fort, bis ab einem gewissen Grenzwert nicht-periodische Schwingungen einsetzen. Die Größenordnung des entsprechenden Am-

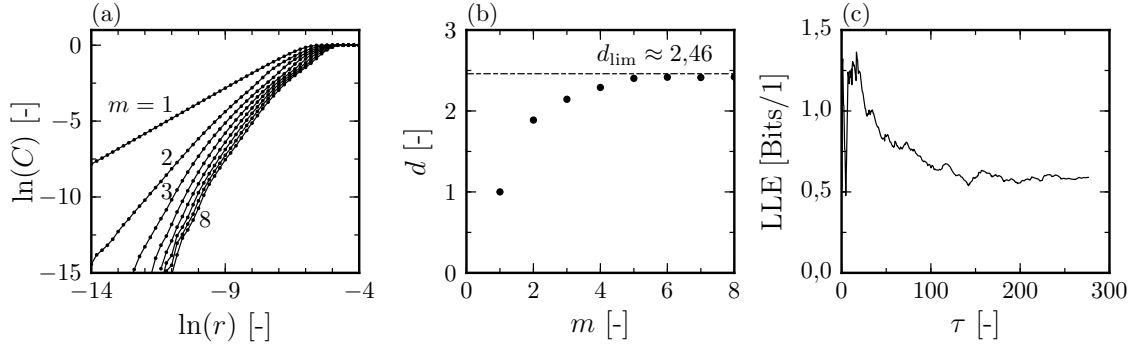




**Abbildung 5.10:** Beteiligung modaler Freiheitsgrade für variierende Membranlasten  $R_x$  bei konstantem dynamischen Druck  $\lambda$ .

plitudenverhältnisses  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  ändert sich hierdurch jedoch nicht. Das Phasenraumportrait 3 in Abbildung 5.10 bestätigt die Erkenntnis aus der Bifurkationsanalyse (vgl. Abbildung 5.9), nach der die Trajektorien des ersten und zweiten modalen Freiheitsgrades,  $q_1$  und  $q_2$ , einem nicht-periodischen Attraktor folgen.

Mithilfe der linearisierten Potentialgleichung (3.47) ist nun eine erste Charakterisierung der verschiedenen Stabilitätsbereiche des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes gelungen. Ein Vergleich mit Lösungen der Euler-Gleichungen (3.40) soll anschließend Aufschluss darüber geben, welchen Einfluss nichtlineare Kompressibilitätseffekte des Fluids auf das aeroelastische System im instabilen Zustandsbereich haben. Abbildung 5.9 stellt die Bifurkationsdiagramme beider Lösungsansätze für den Kontrollparameter  $R_x$  bei einem konstanten dynamischen Druck von  $\lambda = 50$  gegenüber. Hierfür ließen sich in den potentialtheoretischen Betrachtungen sowohl periodische Grenzzyklusschwingungen mit einer diskontinuierlichen Entwicklung des modalen Amplitudenverhältnisses  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  als auch nicht-periodische Schwingungen identifizieren. Abbildung 5.9 zeigt zunächst, dass die lokalen Schwingungsamplituden  $\hat{w}$  durch die Lösung der Euler-Gleichungen etwas kleiner ausfallen als jene der potentialtheoretischen Lösungen. Vergleichbar ist hingegen sowohl der Gradient  $\partial\hat{w}/\partial R_x$  im Bereich der periodischen Grenzzyklusschwingungen als auch der diskontinuierliche Übergang zu kleineren Amplituden  $\hat{w}$ . Des weiteren lassen sich nicht-periodische Schwingungen mit ähnlichem Charakter wie die vorab diskutierten Lösungen identifizieren. Abbildung 5.10 zeigt in diesem Zusammenhang, dass die modalen Amplitudenverhältnisse  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  gut mit jenen der potentialtheoretischen Lösungen übereinstimmen und die Schwingungsformen somit vergleichbar sind. Aufgrund der hohen Schwingungsamplituden ( $\hat{w}/h \approx 2$  entspricht  $\hat{w}/L \approx 0,002$ ) sind bereits nichtlineare Kompressibilitätseffekte in den Lösungen der Euler-Gleichungen identifizierbar. Daraus lässt sich schließen, dass der Einfluss lokaler Verdichtungsstöße und Expansionswellen auf die entsprechenden Attraktoreigenschaften gering ist. Im Hinblick auf die Bewertung der aerodynamischen Modellierungsansätze im anwendungsorientierten Umfeld sei abschließend hervorgehoben, dass die Ergebnisse der linearisierten Potentialgleichung (3.47) aufgrund der überhöhten Schwingungsamplituden  $\hat{w}$  zu einer überwiegend konservativen Auslegung eines solchen Systems führen.



**Abbildung 5.11:** Dimensionsanalyse eines nicht-periodischen Attraktors (links, mittig) und Konvergenz des größten Ljapunow-Exponenten (rechts).

### 5.3.3 Analyse der Attraktordimensionalität und Ljapunow-Exponenten

Da in den vorangegangenen Studien bei bestimmten Kombinationen aus hohen Membranlasten  $R_x$  und hohen aerodynamischen Lasten  $\lambda$  nicht-periodische Schwingungen beobachtet wurden, erfordert die richtige Zuordnung der Attraktortypen eine Analyse der Dimensionalität des aeroelastischen Systems. Die Lösungen der von-Kármán'schen Plattengleichung (3.11) werden über die ersten 12 Eigenschwingungsformen approximiert. Folglich ist der Phasenraum 24-dimensional. Die Ergebnisse in dieser Arbeit werden hingegen in zweidimensionalen Phasenraumportraits abgebildet, was zu Missinterpretationen der Attraktoreigenschaften führen kann. Zur Bestimmung der richtigen Einbettungsdimension wird daher die *time-delay*-Methode [111, 112] auf die potentialtheoretische Lösung der zeitvarianten Verschiebung  $w(\xi = 0,5, \tau)$  angewendet.

Zur Bestimmung der Dimensionalität des aeroelastischen Systems sei mit  $R_x = 6$  und  $\lambda = 50$  die höchste Lastkombination der folgenden Detailanalysen genauer betrachtet. Die Versatzrate  $\tau_v$  wird so gewählt, dass sie groß genug ist, eine lineare Abhängigkeit benachbarter Punktesets  $\mathbf{X}_i = \{x(\tau_0), \dots, x(\tau_0 + (m-1)\tau_v)\}$  zu vermeiden, gleichzeitig jedoch klein genug ist, um die Struktur des Attraktors zu erhalten. Die Korrelationsfunktion  $C(r)$  wird für verschiedene Radien  $r$  einer Hypersphäre durch eine sukzessive Erhöhung der Dimension  $m = 1, \dots, 8$  ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei beliebige Punkte des Attraktors in derselben Hypersphäre befinden, wird durch

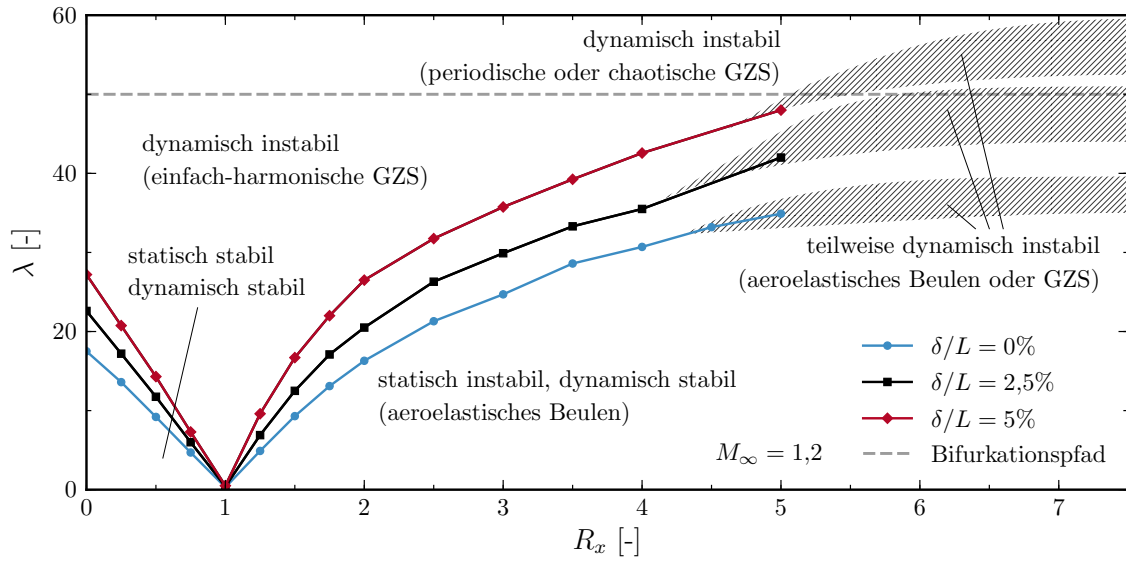
$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N H(r - |\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i|) \quad (5.1)$$

ausgedrückt, wobei  $H$  die Heaviside-Funktion und  $N$  die Anzahl der diskreten Punkte des Attraktors darstellt. Abbildung 5.11(a) gibt die Lösung der Korrelationsfunktion  $C(r)$  für verschiedene Radien  $r$  wieder. Die Dimensionalität  $d$  des Attraktors lässt sich über den Zusammenhang

$$\ln(C(r)) = d |\ln(r)| \quad (5.2)$$

approximieren. Abbildung 5.11(b) verdeutlicht, dass  $d$  bei einer Erhöhung der Einbettungsdimension  $m$  gegen einen Grenzwert  $d_{\text{lim}} \approx 2,46$  strebt. Jener entspricht der Dimensionalität des Attraktors [112]. Die Anwendung der *time delay*-Methode für verschiedene Positionen  $\xi$  auf der Schalenoberfläche führt zu vergleichbaren Ergebnissen. Basierend auf diesen Erkenntnissen wird anschließend der Ljapunow-Exponent für eine dreidimensionale





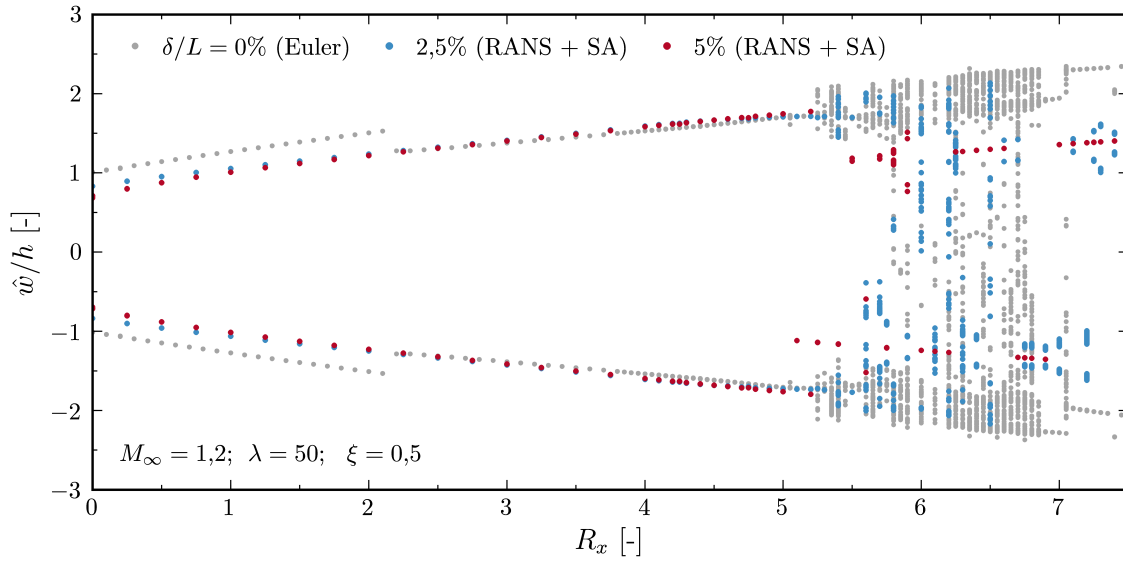
**Abbildung 5.12:** Stabilitätsbereiche einer ebenen Schale unter einer Membranlast  $R_x$  für variierende Grenzschichtdicken  $\delta$  bei Mach 1,2.

Rekonstruktion des Attraktors nach dem Ansatz von Wolf et al. [113] ermittelt. Aus diesem lässt sich eine Aussage über die Divergenz nahegelegener Trajektorien im Phasenraum ableiten. So weisen positive Ljapunow-Werte auf einen chaotischen Attraktor hin. Der größte Ljapunow-Exponent (engl.: *largest Ljapunow exponent*, LLE) ist in Abbildung 5.11(c) abgebildet. Da dieser einem positiven Wert entgegen strebt, lässt sich die Behauptung aufstellen, dass der untersuchte Attraktor chaotisch ist, wenngleich berücksichtigt werden muss, dass die Anzahl der diskreten Zeitschritte limitiert ist ( $\approx 15\,000$ ). Im Rahmen dieser Studie sei jedoch die Kenntnis über die wahre Einbettungsdimension des Attraktors und der Indikator, dass es sich um chaotische Attraktoren handelt, ausreichend in Hinblick auf eine anschließende Charakterisierung des Grenzschichteinflusses.

### 5.3.4 Einfluss turbulenter Grenzschichten

In Analogie zu den Untersuchungen der reibungsfreien Systeme sei im Folgenden der Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die Systemdynamik in den instabilen Zustandsbereichen des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes analysiert. Hierzu werden mithilfe des SA-Turbulenzmodells zwei verschiedene Grenzschichten mit einer Dicke von  $\delta/L = 2,5\%$  und  $5\%$  modelliert.

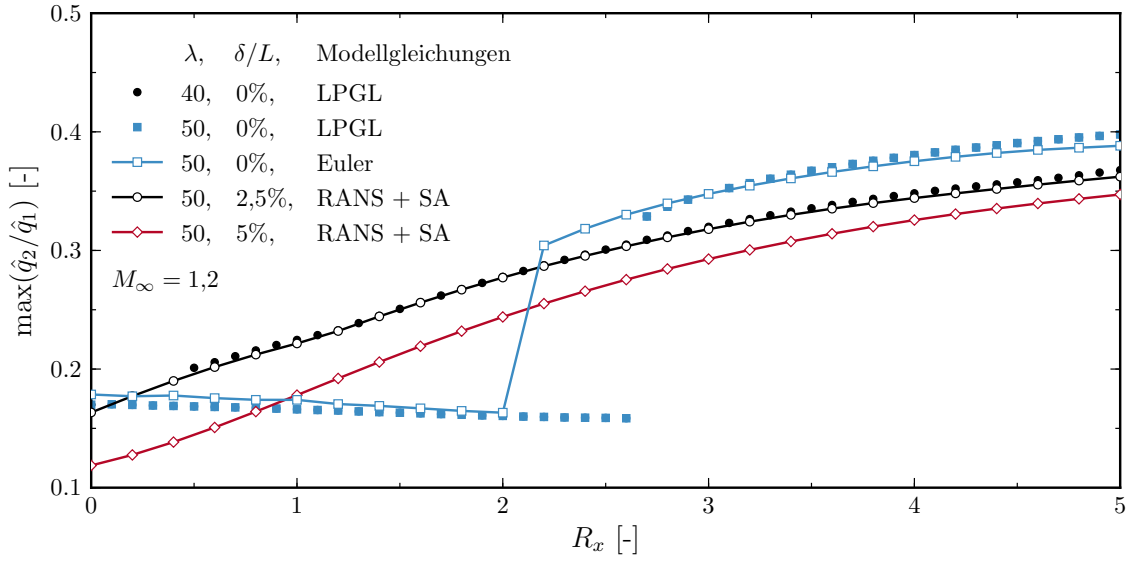
Zunächst ist zu klären, inwieweit die Grenzschicht die Unterteilung des betrachteten Parameterraumes in die oben identifizierten Stabilitätsbereiche beeinflusst. Hierzu stellt Abbildung 5.12 die Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  reibungsfreier und reibungsbehafteter Systeme einander gegenüber. Dabei zeigt sich, dass eine Zunahme der Grenzschichtdicke  $\delta$  stets mit einem Anstieg der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  korreliert. Darüber hinaus lässt sich wie in Abschnitt 5.2 ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen  $\delta$  und  $\lambda_{\text{krit}}$  identifizieren. Dies bedeutet jedoch, dass Letztere für  $R_x = 1$  trotz des Einflusses turbulenter Grenzschichten bis auf  $\lambda \approx 0$  abfällt. Für  $R_x > 5$  nimmt die Sensitivität der Lösung auf die Wahl der Anfangsbedingungen wie bei den reibungsfreien Ergebnissen zu (vgl. Abschnitt 5.3.1).



**Abbildung 5.13:** Bifurkationsdiagramme für variierende Grenzsichtdicken  $\delta$  und Membranlasten  $R_x$  bei konstantem dynamischen Druck  $\lambda = 50$ .

Der Grenzschichteinfluss auf die Systemdynamik in den instabilen Zustandsbereichen sei mittels einer Bifurkationsanalyse der Schwingungsamplituden  $\hat{w}$  mit  $R_x$  als Kontrollparameter untersucht. Durch die Wahl des dynamischen Drucks  $\lambda = 50$  werden periodische und chaotische Attraktoren berücksichtigt. Die resultierenden Bifurkationsdiagramme sind in Abbildung 5.13 und die dazugehörigen modalen Amplitudenverhältnisse  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  in Abbildung 5.14 dargestellt. Für den Fall kleiner Membranlasten (vgl.  $R_x < 2$  in Abbildung 5.14) nimmt die lokale Schwingungsamplitude  $\hat{w}$  mit zunehmender Grenzsichtdicke  $\delta$  merklich ab. Dieses Phänomen wurde für  $R_x = 0$  bereits in der Literatur nachgewiesen [15, 68] und sei im Folgenden unter Berücksichtigung der Membranlast  $R_x$  näher betrachtet. Zunächst zeigt Abbildung 5.14 erneut die Ergebnisse reibungsfreier Konfigurationen aus Abschnitt 5.3.2 (vgl. Abbildung 5.10), die für eine zunehmende Membranlast  $R_x$  eine abnehmende Beteiligung der zweiten Eigenschwingungsform  $\psi_2$ , nach Gleichung (3.21) ausgedrückt über die modale Amplitude  $\hat{q}_2$ , nachweisen. Die Präsenz einer Grenzschicht bewirkt den gegenteiligen Effekt, d.h. die zweite Eigenschwingungsform gewinnt mit zunehmender Membranlast  $R_x$  an Einfluss. Dies deutet darauf hin, dass die aeroelastischen Schwingungsformen, und damit die lokalen Amplituden  $\hat{w}(\xi = 0,5)$ , voneinander abweichen. Bevor dieser Aspekt detaillierter betrachtet wird, sei ebenfalls hervorgehoben, dass eine zunehmende Grenzsichtdicke  $\delta$  wiederum mit einer reduzierten Beteiligung der zweiten Eigenschwingungsform korreliert. Um diese Phänomene besser zu verstehen, seien die Membranlasten  $R_x = 0$  und  $R_x = 2$ , d.h. kurz vor dem diskontinuierlichen Anstieg des modalen Amplitudenverhältnisses  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$ , für weitere Detailstudien gewählt. Zu diesem Zweck werden die folgenden Darstellungsformen herangezogen:

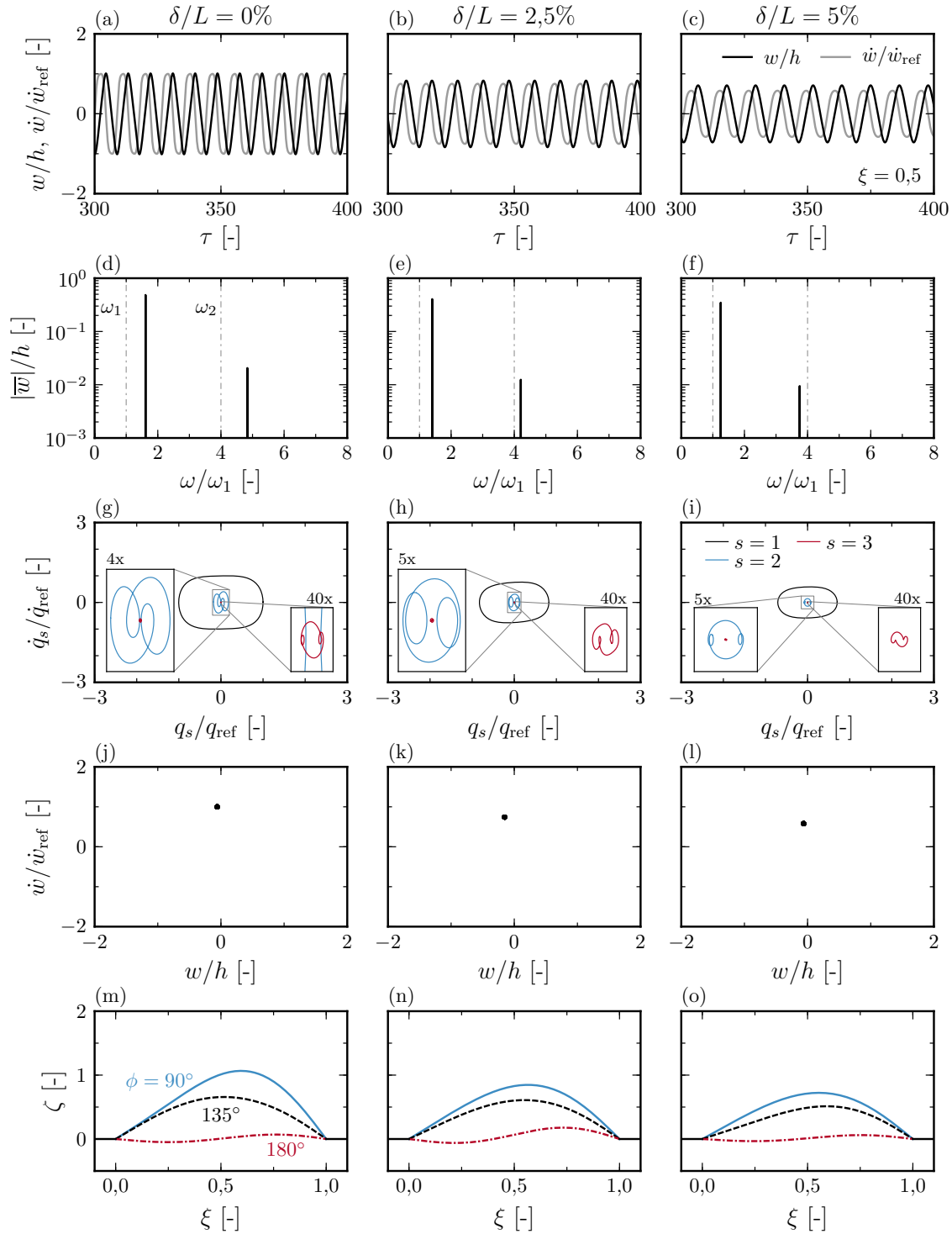
- Zeithistorien der lokalen Verschiebung  $w(\xi = 0,5, \tau)$
- frequenzbasierte Amplitudenspektren  $|\bar{w}|(\xi = 0,5, \omega)$  durch Anwendung einer FFT
- Phasenraumportraits der ersten drei generalisierten Koordinaten  $q_s$
- Poincaré-Karten der lokalen Verschiebung  $w(\xi = 0,5)$
- räumliche Darstellungen ausgewählter Verformungszustände  $w(\xi, \tau = \text{konst.})$



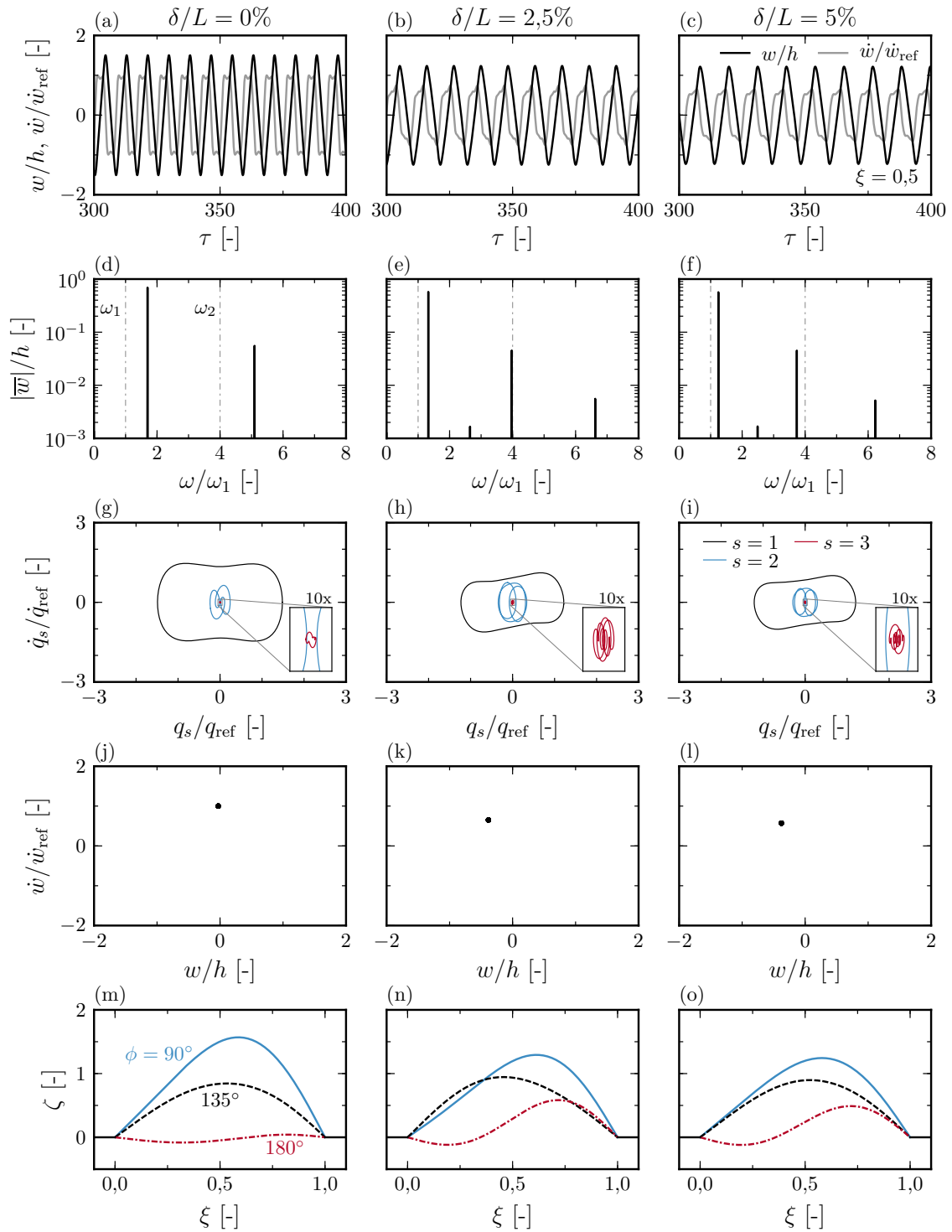
**Abbildung 5.14:** Verhältnis modaler Freiheitsgrade für variierende Grenzschichtdicken  $\delta$  und Membranlasten  $R_x$  bei konstantem dynamischen Druck  $\lambda$ .

Abbildungen 5.15 und 5.16 fassen für  $R_x = 0$  und  $R_x = 2$  jeweils die Ergebnisse der reibungsfreien und viskosen Systeme entsprechend der oben aufgeführten Darstellungsformen zusammen. So wird anhand der Phasenraumportraits in den Abbildungen 5.15(g) bis (i) und 5.16(g) bis (i) deutlich, dass die turbulente Grenzschicht für beide Lastfälle ( $R_x = 0$  und  $R_x = 2$ ) signifikant zu einer Amplitudenreduktion der ersten generalisierten Koordinate  $q_1$  beiträgt. Da diese die aeroelastische Schwingungsform dominiert, werden die lokalen Amplituden  $\hat{w}(\xi = 0,5)$  ebenfalls deutlich reduziert (vgl. Abbildungen 5.15(a) bis (c) und Abbildungen 5.16(a) bis (c)). Die Trajektorien der zweiten und dritten generalisierten Koordinate,  $q_2$  und  $q_3$ , folgen währenddessen einem mehrfach-periodischen Attraktor, dessen maximale Amplituden zunächst zu- ( $\delta/L = 0 \rightarrow 2,5\%$ ) und bei größeren Grenzschichtdicken wieder abnehmen ( $\delta/L = 2,5\% \rightarrow 5\%$ ). Darüber hinaus ist für  $q_2$  zu erkennen, dass sich die im Bereich positiver und negativer Auslenkung liegenden Zentren der inneren schleifenförmig verlaufenden Trajektorien mit zunehmender Grenzschichtdicke  $\delta$  in Richtung höherer Absolutwerte  $|q_2|$  verschieben.

Analog zur Variation der Grenzschichtdicke  $\delta$  ließ sich ein vergleichbares Phänomen in umgekehrter Reihenfolge bereits in den auf  $\lambda$  bezogenen Bifurkationsstudien beobachten (vgl. Abbildung 5.7). Die Trajektorien reibungsfreier Systeme bei hohen dynamischen Drücken  $\lambda$  (vgl. Phasenraumportrait 3 in Abbildung 5.7) finden sich qualitativ in den Abbildungen 5.15(g) und 5.16(g) wieder. Eine anschließende Abnahme des dynamischen Drucks  $\lambda$  (vgl. Phasenraumportraits 3  $\rightarrow$  1 in Abbildung 5.7) hat vergleichbare Auswirkungen auf die Trajektorien wie eine Zunahme der Grenzschichtdicke  $\delta$  (vgl. Abbildungen 5.15(g) bis (i) und 5.16(g) bis (i)). Dieser Zusammenhang lässt sich ebenfalls aus Abbildung 5.14 durch einen Vergleich der Lösungen  $(\lambda; \delta/L) = (50; 2,5\%)$  und  $(\lambda; \delta/L) = (40; 0)$  ableiten: Die mit steigender Membranlast  $R_x$  beobachtete Zunahme des modalen Amplitudenverhältnisses  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  in einer grenzschichtbehafteten Strömung ähnelt jener der reibungsfreien Systeme bei kleineren dynamischen Drücken  $\lambda$ . So ist etwa eine Erhöhung der Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 0$  auf  $25\%$  bei  $\lambda = 50$  äquivalent zu einer Reduktion des dynamischen Drucks der reibungsfreien Konfigurationen von  $\lambda = 50$  auf  $\lambda = 40$  für  $\delta/L = 0$ .



**Abbildung 5.15:** Systemdynamik bei  $\lambda = 50$  und  $R_x = 0$  für  $\delta/L = 0\%$  (links),  $2.5\%$  (mittig) und  $5\%$  (rechts), normiert auf  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_1)|_{R_x=0, \delta=0}$  und  $\dot{w}_{\text{ref}} = \max(\hat{\dot{w}})|_{\delta=0}$ .



**Abbildung 5.16:** Systemdynamik bei  $\lambda = 50$  und  $R_x = 2$  für  $\delta/L = 0\%$  (links),  $2.5\%$  (mittig) und  $5\%$  (rechts), normiert auf  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_1)|_{R_x=0, \delta=0}$  und  $\dot{w}_{\text{ref}} = \max(\hat{w})|_{\delta=0}$ .

Eine FFT der lokalen Verschiebung  $w(\xi = 0,5, \tau)$  soll im Folgenden Aufschluss über die Energieverteilung der oben diskutierten Lösungen im Frequenzbereich geben. Die Abbildungen 5.15(d) bis (f) und 5.16(d) bis (f) zeigen die resultierenden Amplitudenspektren für  $R_x = 0$  und  $R_x = 2$ . Diese lassen zunächst erkennen, dass die Energie der Schwingungen auf diskrete Frequenzen konzentriert ist, d.h. die Lösungen aus diskreten harmonischen Anteilen zusammengesetzt sind. Neben einem dominanten Peak im Bereich der niedrigsten Eigenfrequenz  $\omega_1$  finden sich weitere Peaks mit kleineren Amplituden im höheren Frequenzbereich. Hierbei deutet sich an, dass eine zunehmende Grenzschichtdicke mit einer Verschiebung dieser Frequenzanteile in Richtung kleinerer Frequenzen korreliert. Dieser Effekt ist für die höher-harmonischen Lösungsanteile deutlich ausgeprägter als für die erste Harmonische. Zudem legen die Ergebnisse nahe, dass die höher-harmonischen Anteile aus einer Erhöhung der Membranlasten  $R_x$  resultieren. Die Attraktoren der dritten generalisierten Koordinate  $q_3$  in den Abbildungen 5.15(g) bis (i) und 5.16(g) bis (i) bestätigen diese Erkenntnis.

In dieser Arbeit seien zudem Poincaré-Karten herangezogen, um die Dynamik der komplexen Schwingungszustände genauer charakterisieren zu können. Dazu wird die Verschiebung  $w(\xi = 0,5)$  und die Geschwindigkeit  $\dot{w}(\xi = 0,5)$  nur dann im Phasenraum abgebildet, wenn die Verschiebung  $w(\xi = 0,25)$  ihren Nulldurchgang in positive  $z$ -Richtung aufweist, d.h.  $w(\xi = 0,25) = 0$  und  $\dot{w}(\xi = 0,25) > 0$ . Somit repräsentieren  $N$ -Lösungspunkte einer Poincaré-Karte eine  $N$ -fach-periodische Schwingung, während eine unregelmäßige Verteilung von Lösungspunkten eine nicht-periodische Bewegung kennzeichnet. Wie zu erwarten, bestätigen die Poincaré-Karten in den Abbildungen 5.15(j) bis (l) und 5.16(j) bis (l) zunächst, dass die weniger komplexen Attraktoren für  $R_x = 0$  und  $R_x = 2$  einfach-periodischen Schwingungen entsprechen.

Eine räumliche Darstellung der Verformungszustände  $w(\xi, \tau)$  soll abschließend dazu beitragen, die obigen Erkenntnisse etwas besser zu veranschaulichen. Dazu sind in den Abbildungen 5.15(m) bis (o) und 5.16(m) bis (o) die Verformungen zum Zeitpunkt der maximalen Auslenkung  $\hat{w}(\xi = 0,5)$  sowie zu zwei weiteren äquidistanten Zeitpunkten bis zum Erreichen des Nulldurchgangs  $w(\xi = 0,5) = 0$  dargestellt. In Anlehnung an eine sinusförmige Schwingung seien diese Zustände respektive mit der Phase  $\phi = 90^\circ$ ,  $135^\circ$  und  $180^\circ$  gekennzeichnet. Neben der Dominanz der ersten Eigenschwingungsform  $\psi_1$  lässt sich insbesondere für  $\phi = 180^\circ$  die zunehmende Beteiligung der zweiten Eigenschwingungsform  $\psi_2$  erkennen.

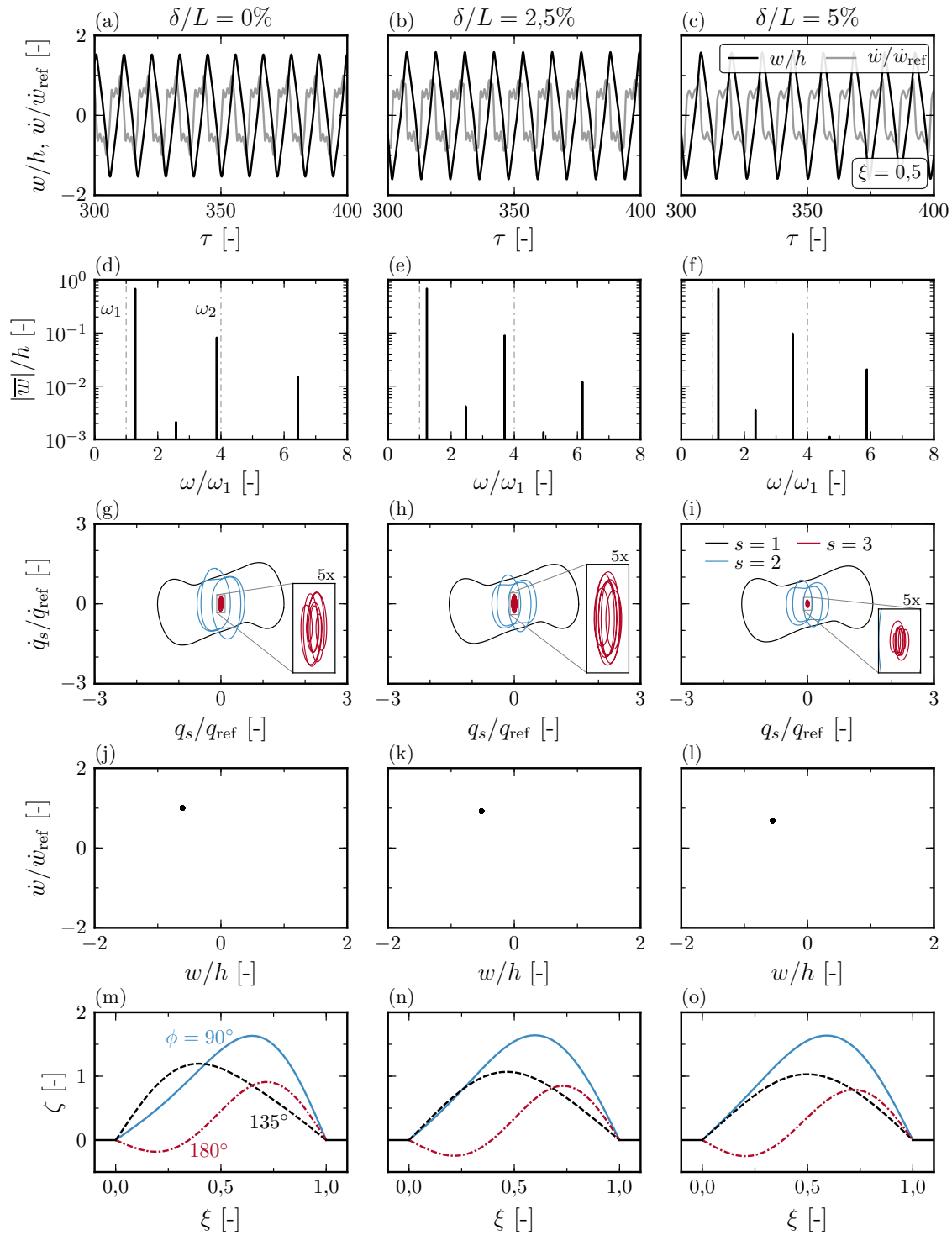
Im Folgenden sei mit einer Membranlast von  $R_x = 4$  ein Zustand näher betrachtet, für den die vorangegangene Bifurkationsanalyse (vgl. Abbildung 5.13) zunächst keinen nennenswerten Hinweis auf einen Grenzschichteinfluss geben konnte. So zeigen die Zeit-historien in den Abbildungen 5.17(a) bis (c) bezüglich der Verschiebung  $w(\xi = 0,5, \tau)$  untereinander keine eindeutigen Abweichungen. Lediglich über die Geschwindigkeitsverläufe  $\dot{w}(\xi = 0,5, \tau)$  sind mit zunehmender Grenzschichtdicke  $\delta$  Unterschiede in den höher-harmonischen Anteilen, die wiederum aus der Erhöhung der Membranlast  $R_x$  resultieren, erkennbar. Die Amplitudenspektren in den Abbildungen 5.17(d) bis (f) verdeutlichen dies durch zusätzliche Peaks im höheren Frequenzbereich. Wie in den vorangegangenen Untersuchungen werden diese durch die Präsenz einer Grenzschicht in Richtung niedrigerer Frequenzen verschoben. Ein Vergleich der Attraktoren der ersten drei generalisierten Koordinaten reibungsfreier Systeme für  $R_x = 2$  und  $R_x = 4$  (vgl. Abbildungen 5.16(g) und 5.17(g)) bestätigt zunächst, dass in einer reibungsfreien Strömung die aeroelastische Schwingungsform beim Überschreiten der Diskontinuität des Bifurkationsdiagrammes (vgl.

Abbildung 5.13) durch einen deutlichen Anstieg des Amplitudenverhältnisses  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  geprägt ist. Die Präsenz einer Grenzschicht bewirkt zwar einen entgegengesetzten Trend, wie bereits aus Abbildung 5.14 hervorgeht, die Ausprägung dieses Effektes ist jedoch gering. Die in den Abbildungen 5.17(g) bis (i) dargestellten Attraktoren weisen darüber hinaus nach, dass die Grenzschicht in diesem Bereich keinen Einfluss auf die qualitativen Eigenschaften der aeroelastischen Schwingungsform hat. Dies wird zudem durch die in den Abbildungen 5.17(m) bis (o) dargestellten Verformungszustände  $w(\xi)$  untermauert. Die Poincaré-Karten in den Abbildungen 5.17(j) bis (l) bestätigen, dass es sich bei den superpositionierten Schwingungsformen um einfach-periodische Schwingungen handelt.

Abschließend sei die Analyse des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes durch eine detaillierte Betrachtung nicht-periodischer Attraktoren vervollständigt. Hierfür wird die Membranlast im Vergleich zu den vorangegangenen Untersuchungen auf  $R_x = 6$  erhöht. Abbildung 5.13 deutet darauf hin, dass die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht eine Änderung des Attraktortyps bewirkt. Diesbezüglich zeigen die Zeithistorien in den Abbildungen 5.18(a) bis (c) anhand der Verschiebung  $w(\xi = 0,5, \tau)$ , dass das System für eine geringe Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 2,5\%$  überwiegend um einen in positive  $z$ -Richtung ausgebeulten Zustand oszilliert. Eine weitere Erhöhung der Grenzschichtdicke auf  $\delta/L = 5\%$  dämpft den dynamischen Lösungsanteil komplett und überführt das System in einen stationären Zustand aeroelastischen Beulens. Die aus diesen Lösungen abgeleiteten Amplitudenspektren deuten für  $\delta/L = 0$  und  $2,5\%$  eine breitbandige Energieverteilung der Schwingung an (vgl. Abbildungen 5.18(d) bis (e)). Lassen sich in einer reibungsfreien Strömung zunächst noch einzelne Peaks in der Nähe der ersten und zweiten Eigenkreisfrequenz,  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , identifizieren, so werden diese durch die Präsenz einer Grenzschicht gedämpft. Wie erwartet weisen die entsprechenden Attraktoren der ersten drei generalisierten Freiheitsgrade,  $q_1$  bis  $q_3$ , in einer reibungsfreien Strömung einen nicht-periodischen Charakter auf (vgl. Abbildung 5.18(g)). Die Komplexität des Attraktors nimmt mit zunehmender Grenzschichtdicke  $\delta$  ab, bis die Trajektorien bei einer hohen Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 5\%$  schließlich einen Punktattraktor beschreiben (vgl. Abbildungen 5.18(h) und (i)). Besonders interessant ist im Fall dynamischer Instabilitäten die Poincaré-Karte des als chaotisch charakterisierten reibungsfreien Systems in Abbildung 5.18(j). Die Lösung der linearisierten Potentialgleichung (3.47) ermöglicht die Berechnung von über 5000 Poincaré-Schnitten, wodurch sich in der chaotischen Lösung eine topologische Struktur nachweisen lässt. Eine Gegenüberstellung dieser Ergebnisse mit Lösungen auf Basis der Euler-Gleichungen (3.40) deutet trotz der deutlich geringeren Anzahl an Poincaré-Schnitten an, dass die wesentlichen dynamischen Systemeigenschaften nach beiden Modellbeschreibungen vergleichbar sind. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass nichtlineare Kompressibilitätseffekte des Strömungsfeldes lediglich einen geringen Einfluss auf die Dynamik nicht-periodischer Schwingungen haben. Die Wahl der in Abbildung 5.18(m) dargestellten Verformungszustände  $w(\xi)$  basiert auf einer groben Anlehnung an eine periodische Schwingung, d.h.  $\phi \approx 90^\circ, 135^\circ$  und  $180^\circ$ . In Abbildung 5.18(n) ist hingegen der Zustand, um den die Lösung im Bereich  $z > 0$  oszilliert ( $\phi_1$ ), der Nulldurchgang ( $\phi_2$ ) sowie die negative Auslenkung ( $\phi_3$ ) dargestellt. Abbildung 5.18(o) zeigt indessen eine von zwei möglichen stationären Gleichgewichtslösungen. Diese Darstellungen veranschaulichen die zunehmende Beteiligung der zweiten Eigenschwingungsform  $\psi_2$  bis zum Einsetzen des aeroelastischen Beulens.

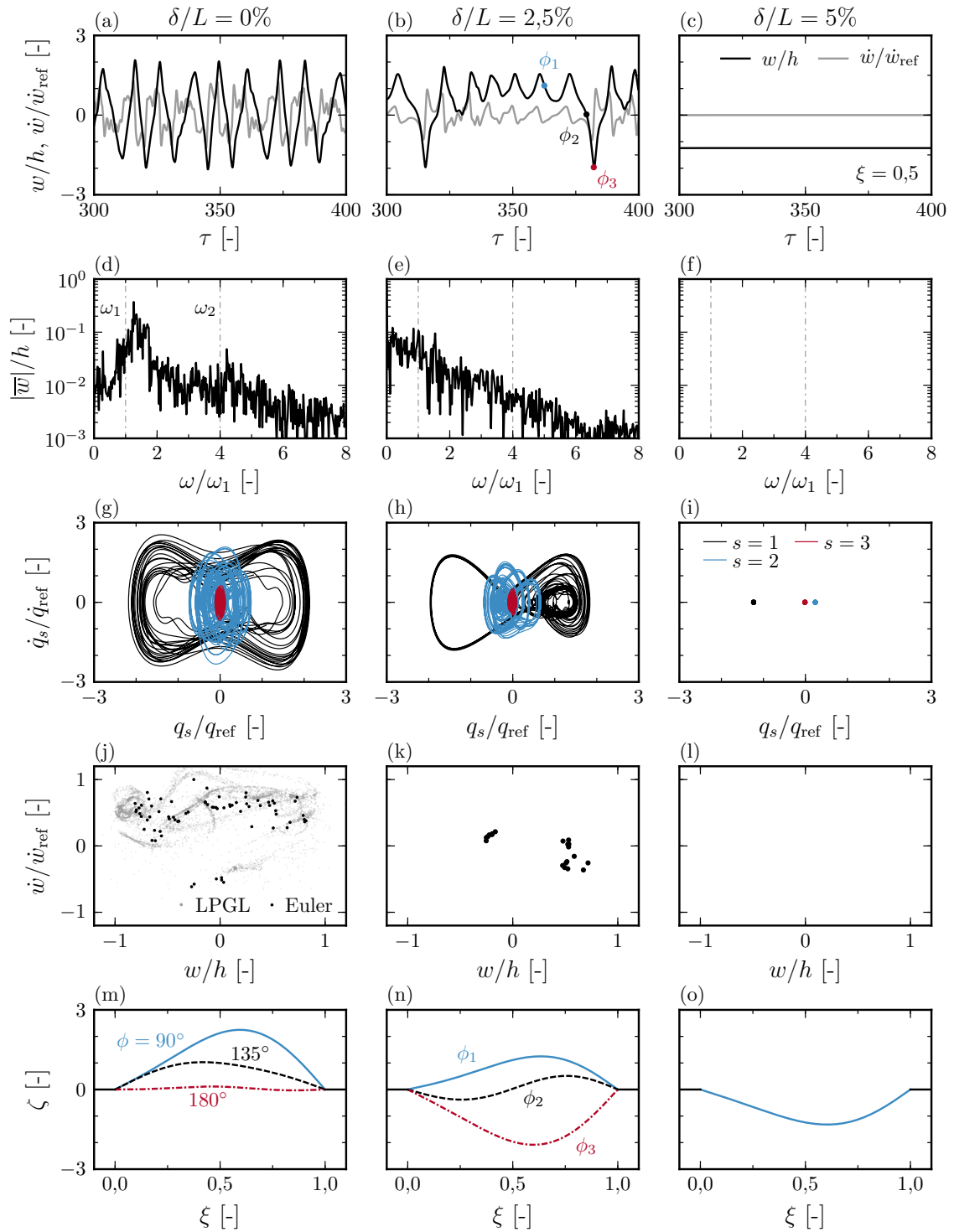
Dass die turbulente Grenzschicht ein System aus dem Zustand nicht-periodischer Schwingungen in den Zustand aeroelastischen Beulens überführen kann, lässt eine interessante Analogie zu den vorangegangenen Diskussionen erkennen. So wurde bereits anhand der modalen Amplitudenverhältnisse  $\hat{q}_2/\hat{q}_1$  in Abbildung 5.14 geschlussfolgert, dass die Be-





**Abbildung 5.17:** Systemdynamik bei  $\lambda = 50$  und  $R_x = 4$  für  $\delta/L = 9\%$  (links),  $2,5\%$  (mittig) und  $5\%$  (rechts), normiert auf  $\dot{w}_{\text{ref}} = \max(\hat{w})|_{\delta=0}$  und  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_1)|_{R_x=0, \delta=0}$ .





**Abbildung 5.18:** Systemdynamik bei  $\lambda = 50$  und  $R_x = 6$  für  $\delta/L = 0\%$  (links),  $2,5\%$  (mittig) und  $5\%$  (rechts), normiert auf  $\dot{w}_{\text{ref}} = \max(\hat{w})|_{\delta=0}$  und  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_1)|_{R_x=0, \delta=0}$ .

rücksichtigung einer turbulenten Grenzschicht einen vergleichbaren Einfluss auf die Systemdynamik zeigt wie eine Abnahme des dynamischen Drucks  $\lambda$  in reibungsfreien Strömungen. Der in der vorangegangenen Analyse beobachtete Übergang in den Bereich des aeroelastischen Beulens (vgl. Abbildungen 5.18(h) und (i)) lässt sich im Hinblick auf die Unterteilung der Stabilitätsbereiche in Abbildung 5.12 mit einer Verschiebung des Bifurkationspfades hin zu kleineren Drücken  $\lambda$  interpretieren, sodass dieser Pfad den Bereich des aeroelastischen Beulens schneidet. Die Reduktion des dynamischen Drucks  $\lambda$  scheint demnach wieder vergleichbare Auswirkungen auf das dynamische System zu haben, wie die Erhöhung der Grenzschichtdicke  $\delta$  bei konstantem  $\lambda$ .

## 5.4 Zusammenfassung in Bezug auf die Zielstellung

Über eine empirische Analyse des  $M_\infty$ - $\lambda$ -Parameterraumes ließ sich zunächst  $M_\infty = 1,2$  als kritische Machzahl, sowohl hinsichtlich des Einflusses turbulenter Grenzschichten als auch hinsichtlich der Trajektorie konventioneller Trägersysteme für Raumfahrtanwendungen, identifizieren. Jene Machzahl wurde daraufhin für detaillierte Studien der verschiedenen Stabilitätsbereiche des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes herangezogen, aus denen zusammenfassend folgende Erkenntnisse über die Systemdynamik reibungsfreier zweidimensionaler Systeme abgeleitet werden konnten:

- 1) Unterhalb der kritischen Beullast einer ebenen Schale ( $R_x < 1$ ) geht eine Erhöhung der Membranlast  $R_x$  mit einer linearen Abnahme der aeroelastischen Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  einher, bis diese auf einen Wert von nahezu  $\lambda_{\text{krit}} \approx 0$  abfällt. Dieser Aspekt ist insbesondere bei der Auslegung entsprechender lasttragender Strukturkomponenten im niedrigen Überschallbereich zu berücksichtigen.
- 2) Bei hohen Membranlasten  $R_x$  ist eine präzise Unterteilung zwischen dynamisch stabilen und instabilen Zustandsbereichen nicht möglich, da verschiedene Attraktortypen in enger Nachbarschaft innerhalb des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes existieren und diese äußerst sensitiv bezüglich der Anfangsbedingung sind.
- 3) Der Einfluss nichtlinearer Kompressibilitätseffekte des Strömungsfeldes auf die Systemdynamik ist vernachlässigbar gering.

Im Kontext des Einflusses turbulenter Grenzschichten lassen sich die Erkenntnisse der ersten Betrachtungsebene wie folgt zusammenfassen:

- 4) Die Wahl des Turbulenzmodells (Spalart-Allmaras und Menter-SST, siehe Anhang B) zur Schließung der RANS-Gleichungen hat keinen erkennbaren Einfluss auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$ . Dies führt zu der These, dass die zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Grenzschicht, die aufgrund der vergleichsweise geringen Störungen einer stets anliegenden Grenzschichtströmung von beiden Turbulenzmodellen nahezu identisch wiedergegeben wird, maßgeblich die beobachtete Zunahme der aerodynamischen Dämpfung verantwortet.
- 5) Die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht führt zu einer Ausdehnung der dynamisch stabilen Zustandsbereiche innerhalb des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes. Hierbei besteht ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen der Grenzschichtdicke  $\delta$  und der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$ , wodurch Letztere trotz der Präsenz einer Grenzschicht für  $R_x \rightarrow 1$  auf  $\lambda_{\text{krit}} \approx 0$  abfällt.

6) Die unter Punkt 2) erläuterte Sensitivität der Lösung auf die Anfangsbedingung lässt sich auch unter dem Einfluss turbulenter Grenzschichten beobachten, jedoch verschiebt sich der betreffende Bereich des  $R_x$ - $\lambda$ -Parameterraumes mit zunehmender Grenzschichtdicke in Richtung höherer dynamischer Drücke  $\lambda$ .

7) Der Grenzschichteinfluss lässt sich qualitativ über eine Analogie zwischen einer Zunahme der Grenzschichtdicke  $\delta$  und einer Abnahme des dynamischen Drucks  $\lambda$  beschreiben. Beide Mechanismen führen zu einer reduzierten Komplexität nicht-periodischer Attraktoren, bis dynamische Instabilitäten komplett gedämpft werden und sich eine von zwei möglichen stationären Gleichgewichtslösungen (aeroelastisches Beulen mit positiver oder negativer Verformungsamplitude) einstellt. Dieses Erkenntnis stützt maßgeblich die These, dass die Reduktion der wandnahen Strömungsgeschwindigkeit den stabilisierenden Grenzschichteinfluss verantwortet.

Zusammenfassend kann entsprechend der ersten Leithypothese dieser Arbeit festgestellt werden, dass die Präsenz turbulenter Grenzschichten insbesondere im Bereich kleiner supersonischer Machzahlen für eine quantitative Bestimmung der aeroelastischen Stabilitätsgrenzen und instabilen Systemzustände berücksichtigt werden muss. In Hinblick auf eine aeroelastische Auslegung derartiger Panelflatter-Systeme führt der Einsatz reibungsfreier Ansätze zur Modellierung des Strömungsfeldes auf überwiegend konservative Lösungen.



## 6 Analyse des aerodynamischen Antwortproblems

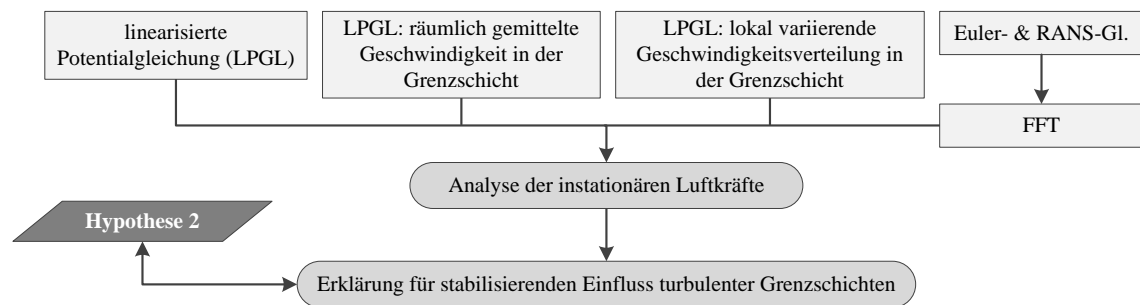


Abbildung 6.1: Übersicht zur Betrachtungsebene 2.

In Kapitel 2 wurde erläutert, dass die Formulierung der aeroelastischen Bewegungsgleichung in generalisierten Koordinaten  $q_s$  ein Energiegleichgewicht zwischen Strömung und Struktur beschreibt und die generalisierten Luftkräfte  $Q_s$  somit ein Maß für den Energietransfer zwischen diesen darstellen. Über eine sehr vereinfachte Stabilitätsbetrachtung im Frequenzbereich ließen sich drei wesentliche Mechanismen aeroelastisch instabiler Systemzustände identifizieren: aeroelastisches Beulen, Ein-Freiheitsgrad-Flattern und Mehr-Freiheitsgrad-Flattern. Diese Mechanismen ließen sich anschließend numerisch durch hochgenaue Analysen des aeroelastischen Stabilitätsproblems im Zeitbereich nachweisen (siehe Kapitel 5), wobei die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht im niedrigen Überschall ( $1 < M_\infty < 1,5$ ) mit einer signifikanten Erhöhung der aerodynamischen Dämpfung, insbesondere im Fall des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns, einherging. Die komplexe Dynamik des gekoppelten Systems lässt jedoch trotz generisch sehr vereinfachter Panelflatter-Konfigurationen lediglich empirische Analysen des Grenzschichteinflusses zu.

Ziel dieses Kapitels ist es daher, über analytische und numerische Analysen der generalisierten Luftkräfte im Frequenzbereich  $\overline{Q}_s$  den Mechanismus des Energietransfers zwischen Strömung und Struktur besser zu verstehen. Da die vorangegangenen Untersuchungen darauf hindeuten, dass die aerodynamische Dämpfung primär durch das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht beeinflusst wird, werden auf potentialtheoretischer Basis zunächst alle Eigenschaften der Grenzschicht bis auf ein vorgegebenes idealisiertes Geschwindigkeitsprofil vernachlässigt, um eine qualitative Erklärung für die bewegungsinduzierte Druckverteilung auf einer oszillierenden Wand ableiten zu können. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse werden anschließend mithilfe numerischer Lösungen der Euler- und RANS-Gleichungen verifiziert und ihr Gültigkeitsbereich hinsichtlich aerodynamischer Nichtlinearitäten und geometrischer Randbedingungen analysiert.

## 6.1 Stand der Wissenschaft

1963 umreißt Fung [10] im Rahmen einer Zusammenfassung bis dato durchgeführter Forschungsaktivitäten zum Panelflattern einen Ansatz zur potentialtheoretischen Modellierung des Grenzschichteinflusses auf die instationären Luftkräfte einer oszillierenden, welligen Wand. Hierfür definiert Fung im wandnahen Bereich des Strömungsfeldes eine Schicht mit konstanter Geschwindigkeit, die über eine unendlich dünne Scherschicht an die freie Anströmung angrenzt (vgl. Abbildung 6.2). Aus einer mathematischen Analyse dieses Modells geht hervor, dass der Grenzschichttrand wie die Schwingung der Wand aus einer stehenden Welle mit einer reduzierten Amplitude und einem überlagerten, wandernden Wellenanteil beschrieben werden kann [10]. Der rückwirkende Mechanismus auf die instationäre Druckverteilung über der oszillierenden Wand wird von Fung jedoch nicht näher betrachtet. Miles [114] und McClure [115] approximieren die Grenzschicht über einer unendlich langen Wand als dünne Scherschicht mit variablen Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen und verwenden simultane Lösungsansätze für aeroelastische Stabilitätsanalysen. Die mathematische Komplexität dieser Analysen geht weit über jene von Fung [10] hinaus, jedoch sind die Ergebnisse dadurch phänomenologisch kaum zu interpretieren oder gar verallgemeinert auf beliebige Panelflatter-Problemstellungen zu übertragen. Zeydel [12] beruft sich auf einen ähnlichen Ansatz wie Fung [10] und approximiert den Grenzschichtbereich unter Berücksichtigung einer endlichen Schalenlänge über eine Vielzahl wandparalleler Scherschichten. Das bereits in Kapitel 1 eingeführte *shear-flow*-Modell von Dowell [13] knüpft an die Formulierungen der Scherschicht von Miles und McClure an. Im Gegensatz zu McClure vernachlässigt Dowell zwar den Einfluss der Viskosität, erweitert die Formulierungen jedoch hinsichtlich räumlich begrenzter Schalengeometrien. Anhand numerischer Berechnungen aerodynamischer Übertragungsfunktionen nach dem *shear-flow*-Modell schlussfolgert Dowell, dass von den oben beschriebenen Modellen lediglich jenes von Zeydel qualitativ richtige Ergebnisse liefert, obwohl die unstetige Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung zu quantitativen Abweichungen führt [11, 13]. Eine Variation des zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils innerhalb der Grenzschicht (Verwendung des Potenzgesetzes nach Prandtl [116] mit den Exponenten  $1/7$ ,  $1/8$  und  $1/9$ ) erzielt zwar nicht die gewünschte Verbesserung in der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, zeigt jedoch, dass selbst kleine Variationen des Grenzschichtprofils große Auswirkung auf die aerodynamische Dämpfung haben [11].

Die vorgestellten Literaturbeispiele setzen sich als primäres Ziel, mit den zur Verfügung stehenden Rechenressourcen möglichst exakt die bewegungsinduzierten Luftkräfte zu bestimmen. Die damit einhergehende mathematische Komplexität der Modelle erschwert jedoch zunehmend die phänomenologische Interpretation der zugrundeliegenden Mechanismen des Grenzschichteinflusses. Daraus leitet sich das Ziel des aktuellen Kapitels ab, durch die Fokussierung auf das aerodynamische Antwortproblem mit möglichst umfangreichen Vereinfachungen in den Modellannahmen zu einem besseren Verständnis der Grenzschichteffekte beizutragen. Insbesondere da die bisherigen Ergebnisse auf einen dominierenden Einfluss des Geschwindigkeitsprofils hindeuten, erweist es sich als vorteilhaft, dass in den sehr vereinfachten Modellannahmen von Fung [10] und den früheren Studien von Zeydel [12] Einflussparameter wie die geometrischen Randbedingungen oder die Viskosität der Strömung vernachlässigt werden. Die Reduktion auf das aerodynamische Antwortproblem erleichtert es darüber hinaus, den Bezug zu angrenzenden Forschungsbereichen, z.B. der Analyse von Strömungen über welligen Wänden, herzustellen.

In diesem Zusammenhang sind abschließend die analytischen und experimentellen Studien von Inger und Williams [117, 118] zu erwähnen, welche die Amplituden- und Phasenverläufe der bewegungsinduzierten Druckstörung in kompressiblen, turbulenten Grenzschichten untersuchen. Für den Machzahlbereich  $0,8 \leq M_\infty \leq 1,8$  lässt sich hierbei ein dämpfender Charakter der Grenzschicht, d.h. eine Abnahme der Stördruckamplitude bei einem zunehmenden Unterschallcharakter der Phasenlage, nachweisen. Die gute Korrelation zwischen theoretischen und experimentellen Daten [117, 118] rechtfertigt zudem die Grundannahme der vorangegangenen Studien, dass im Fall kleiner harmonischer Störungen einer turbulenten Grenzschicht die Interaktion zwischen den Störgeschwindigkeiten und turbulenten Schwankungsgrößen vernachlässigt werden kann. Stock [119] berücksichtigt darüber hinaus die dynamische Wechselwirkung zwischen der Grenzschicht und dem angrenzenden, drehungsfreien Strömungsfeld und ergänzt die Untersuchungen um Geschwindigkeitsprofile laminarer Grenzschichten, wodurch sich eine Verstärkung des subsonischen Charakters der resultierenden Druckverteilung auf der welligen Wand zeigt.

## 6.2 Analytische Untersuchung des Grenzschichteinflusses

Die folgenden Studien basieren auf der Annahme, dass sich ein harmonisch schwingendes Stördruckfeld unter Voraussetzung statischer und dynamischer Linearität aus der Überlagerung zweier Teillösungen zusammensetzen lässt. Diese Teillösungen haben den Charakter wandernder Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung und gleicher Frequenz. Unterscheiden sich die beiden Lösungen in ihrer Amplitude, so kann die superpositionierte Lösung als eine stehende Welle mit einer überlagerten, wandernden Wellenkomponente aufgefasst werden. Motiviert durch den Nachweis von Fung [10], dass sich die Dynamik des Grenzschichtrandes nach diesem Mechanismus beschreiben lässt, sowie der Erkenntnis von Miles [120], dass stromab wandernde Stördruckwellen einen destabilisierenden Charakter aufweisen, sei im Rahmen analytischer Studien zunächst der Bedeutung wandernder Wellen für den Energietransfer zwischen Strömung und Struktur in schallnahen Strömungen ( $M_\infty \rightarrow 1$ ) nachgegangen, um anschließend den Grenzschichteinfluss auf diesen Mechanismus zu analysieren.

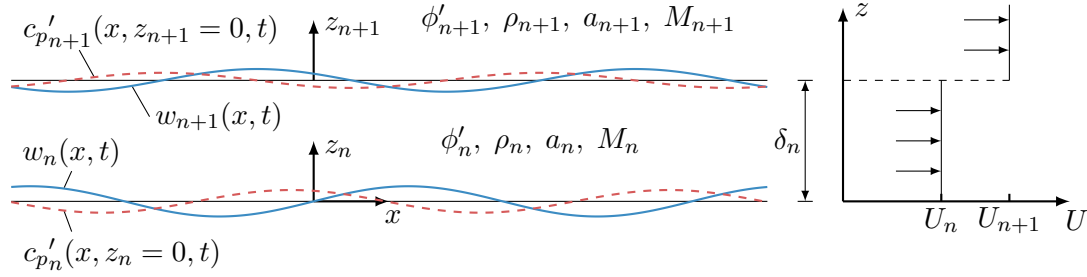
### 6.2.1 Modellbildung

Zunächst seien die folgenden Modellannahmen und Vereinfachungen getroffen:

1. Der ungestörte Grundzustand des Strömungsfeldes  $\Omega^f$  sei charakterisiert durch:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0 . \quad (6.1)$$

2. Es gelten die Annahmen der linearisierten Potentialströmung (vgl. Abschnitt 3.2.1). Jegliche Störanteile seien somit klein und können nach dem Superpositionsprinzip dem stationären Grundzustand überlagert werden (siehe Gleichung (3.44)).
3. Die Geschwindigkeitsgradienten des stationären Grundzustandes in  $z$ -Richtung seien durch eine endliche Anzahl  $N$  wandparalleler Fluidschichten  $n$  mit einer jeweils konstanten lokalen Machzahl  $M_n$  und Dicke  $\delta_n$  approximiert, die über eine Wirbelschicht konstanter Stärke miteinander interagieren (siehe Abbildung 6.2).



**Abbildung 6.2:** Idealisierte Geschwindigkeitsverteilung über eine Fluidschicht  $n$ .

4. Das Strömungsfeld grenzt bei  $z = 0$  an eine ebene Wand, der eine stehende Transversalwelle von  $-\infty < x < \infty$  überlagert ist. Somit lassen sich etwaige Grenzschichteffekte isoliert von den Einflüssen der geometrischen Randbedingungen (vgl. Abschnitt 3.1.1) betrachten.

Abbildung 6.2 zeigt schematisch eine Fluidschicht  $n$  unter Berücksichtigung der obigen Modellannahmen. Für  $N = 1$  entspricht dieses Modell jenem von Fung [10], d.h. die oszillierende Wand wird durch  $w_0(x, t)$  repräsentiert und die Grenzschicht über eine einzige Fluidschicht  $n$  (im Folgenden als Unterschicht bezeichnet) mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit  $U_n$  approximiert. Die mathematischen Formulierungen in der vorliegenden Arbeit sind jedoch dahingehend verallgemeinert, dass  $M_0 > 1$  sowie  $M_1 < 1$  zulässig ist. Dies ermöglicht sowohl die Approximation der grenzschichtbehafteten Strömung im subsonischen und hohen supersonischen Machzahlbereich als auch die Approximation der Grenzschicht über mehrere Unterschichten ( $N > 1$ ).

Das lokale Störgeschwindigkeitspotential  $\phi'_n(x, t)$  kann für jede Fluidschicht  $n$  über die linearisierte Potentialgleichung (3.47) bestimmt werden, die sich für die hier betrachtete Problemstellung in Abhängigkeit der lokalen Machzahl  $M_n$  und Schallgeschwindigkeit  $a_n$  mit  $\beta_n = (M_n^2 - 1)$  angeben lässt:

$$\frac{1}{a_n^2} \frac{\partial^2 \phi'_n}{\partial t^2} + \frac{2M_n}{a_n} \frac{\partial^2 \phi'_n}{\partial x \partial t} + \beta_n^2 \frac{\partial^2 \phi'_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi'_n}{\partial z_n^2}. \quad (6.2)$$

Für die Lösung der Gleichung (6.2) muss die kinematische Strömungsrandbedingung für  $-\infty < x < \infty$  und  $-\infty < t < \infty$  erfüllt sein:

$$\left. \frac{\partial \phi'_n}{\partial z_n} \right|_{z_n=0} = \frac{\partial w_n}{\partial t} + U_n \frac{\partial w_n}{\partial x}, \quad (6.3)$$

$$\left. \frac{\partial \phi'_n}{\partial z_n} \right|_{z_n=\delta_n} = \frac{\partial w_{n+1}}{\partial t} + U_n \frac{\partial w_{n+1}}{\partial x}. \quad (6.4)$$

Des Weiteren wird ein stetiger Druckverlauf über die Wirbelschichten gefordert:

$$p'_n|_{z_n=\delta_n} = p'_{n+1}|_{z_{n+1}=0}. \quad (6.5)$$

Ferner ist die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung für  $z \rightarrow \infty$  zu erfüllen, nach der sich jegliche Störungen reflexionsfrei bis ins Unendliche ausbreiten.

Eine stehende Schwingung der Wand  $w_0(x, t)$  lässt sich nun unter Berücksichtigung der



oben genannten Modellannahmen über den Summenansatz

$$w_0 = e^{i\omega t} \sum_{s=1}^{\infty} \bar{q}_s \psi_s \quad \text{mit} \quad \psi_s = \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) \quad (6.6)$$

beschreiben. Die dadurch initiierten Stromlinienschwingungen  $w_n(x, y, t)$  ergeben sich aufgrund der Linearisierung um den stationären Grundzustand aus der Superposition der Teillösungen  $w_{n,\nu}(x, y, t)$ :

$$w_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} w_{n,\nu} , \quad (6.7)$$

die wiederum den Charakter wandernder Wellen aufweisen:

$$w_{n,\nu} = \bar{w}_{n,\nu} e^{i\omega t} = \tilde{w}_{n,\nu} e^{i(\omega t + \alpha_\nu x)} . \quad (6.8)$$

Hierbei kennzeichnen  $\bar{w}_n$  und  $\tilde{w}_n$  komplexe Amplituden,  $\nu$  eine Zählvariable und

$$\alpha_\nu = \nu \frac{\pi}{L} \quad (6.9)$$

die  $x$ -Komponente der Wellenzahl  $\mathbf{k}_\nu = [\alpha_\nu, \gamma_\nu]^T$ . Gleichung (6.6) lässt sich somit aus der Überlagerung einer stromauf ( $\text{sgn}(\nu) = 1$ ) und einer stromab ( $\text{sgn}(\nu) = -1$ ) wandernden Welle mit der komplexen Amplitude

$$\tilde{w}_{0,\nu} = \text{sgn}(\nu) \frac{|\bar{q}_s|}{2i} \quad \text{mit} \quad \nu = \pm s \quad (6.10)$$

rekonstruieren. Die allgemeine Lösung der Potentialfelder hat entsprechend die Form

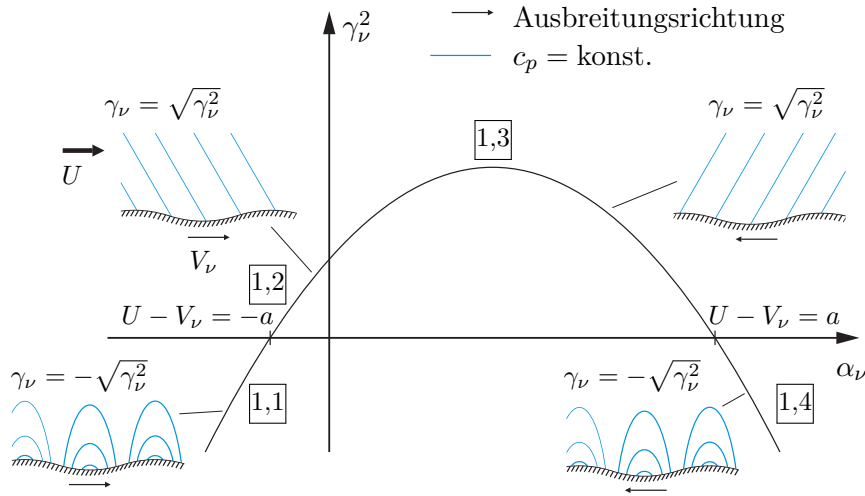
$$\phi'_{n,\nu} = [A_{n,\nu} \sin(\gamma_{n,\nu} z_n) + B_{n,\nu} \cos(\gamma_{n,\nu} z_n)] e^{i(\omega t + \alpha_\nu x)} . \quad (6.11)$$

Einsetzen des Ansatzes (6.11) in Gleichung (6.2) führt auf die Dispersionsrelation

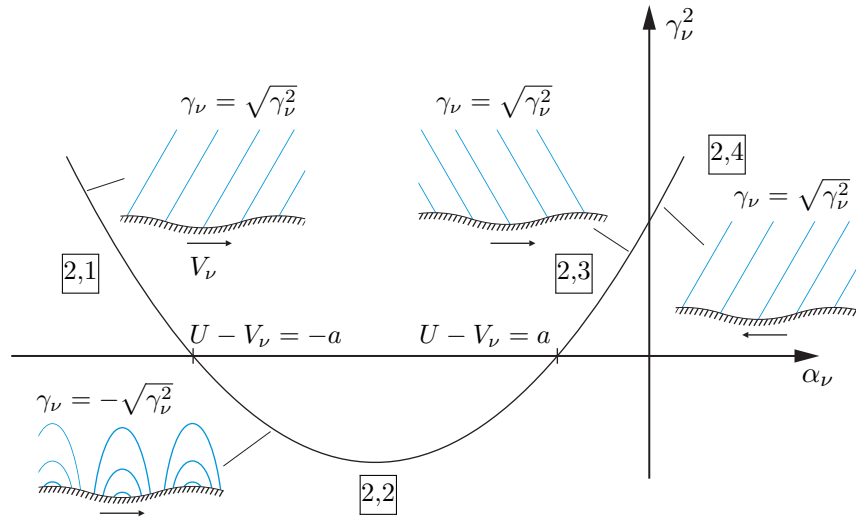
$$\frac{\omega^2}{a_n^2} + \frac{2M_n}{a_n} \omega \alpha_\nu - (1 - M_n^2) \alpha_\nu^2 = \gamma_{n,\nu}^2 , \quad (6.12)$$

die die  $x$ - und  $z$ -Komponente der Wellenzahl,  $\alpha_\nu$  und  $\gamma_\nu$ , mit der Kreisfrequenz  $\omega$  in Beziehung setzt. Ist im Sinne einer erzwungenen Schwingung der Wand  $\omega$  und  $\alpha_\nu$  vorgegeben, so ist nach Gleichung (6.12) zunächst  $\gamma_n(z)$  in Abhängigkeit des lokalen Grundströmungszustandes ( $M_n(z)$  und  $a_n(z)$ ) zu bestimmen. Die Abbildungen 6.3 und 6.4 stellen aus der Menge der mathematischen Lösungen die physikalisch plausiblen Teillösungen für den subsonischen und supersonischen Grundströmungszustand dar. Um die Grundlage für eine phänomenologische Interpretation des Energietransfers zu schaffen, seien die Lösungen zunächst aus qualitativer Sicht für den Fall eines grenzschichtfreien Strömungsfeldes ( $N = 0$ ) detaillierter betrachtet.

Die vorangegangenen Erläuterungen beziehen sich auf eine ortsfeste Betrachtung, die im Folgenden als inertiales Referenzsystem bezeichnet wird. Ein Betrachter nimmt hierbei den Grundströmungszustand mit der Geschwindigkeit  $U_0$  wahr. Hingegen erweist es sich für die Analyse der wandernden Wellenkomponenten als vorteilhaft, diese in einem körperfesten Bezugssystem bezüglich der wandernden Wellen zu betrachten. Hierbei bewegt sich ein Beobachter mit der Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  relativ zum inertialen Referenzsystem. Im körperfesten Bezugssystem weist die Lösung den Charakter eines stationären Strömungs-



**Abbildung 6.3:** Dispersionsrelation in subsonischen Strömungsfeldern.



**Abbildung 6.4:** Dispersionsrelation in supersonischen Strömungsfeldern.

feldes über einer welligen Wand auf. Die Kreisfrequenz  $\omega$  im inertialen Referenzsystem korreliert über die Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  mit der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  im körperfesten Bezugssystem:

$$V_\nu = -\frac{\omega}{\alpha_\nu} . \quad (6.13)$$

Hieraus ergibt sich die relative Machzahl  $\underline{M}(z)$  im körperfesten Bezugssystem:

$$\underline{M}_{0,\nu} = \frac{U_0 - V_\nu}{a_0} . \quad (6.14)$$

Die Wellenzahl  $\gamma_{0,\nu}$  stellt genau dann eine physikalisch plausible Lösung dar, wenn das Stördruckfeld für  $\underline{M}_{0,\nu} < 1$  eine evaneszenten Welle in Richtung  $z \rightarrow \infty$  beschreibt. Hierbei nimmt  $\gamma_{0,\nu}$  einen imaginären Wert an. Dieser Fall kann für  $M_0 < 1$  sowohl für die stromab- als auch die stromauf wandernde Welle eintreten, während für  $M_0 > 1$  lediglich die stromab wandernde Komponente einer relativen Unterschallströmung ausgesetzt sein kann. Ist  $|\underline{M}_{0,\nu}| > 1$ , so überlagern sich die Störungen zu ungedämpften Wellen, deren Fronten unter dem Mach'schen Winkel  $\theta_\nu = \arcsin(1/\underline{M}_{0,\nu})$  gegenüber der relativen An-

strömung geneigt sind. Für  $|U_0 - V_\nu| = a_0$  ist  $\gamma_{0,\nu} = 0$  und die Lösung somit singular. Entsprechend lässt sich für eine beliebige Fluidschicht  $n$  der Zusammenhang

$$\gamma_{n,\nu} = 0 \Leftrightarrow \alpha_\nu = -\frac{\omega}{a_n(M_n - 1)} \quad \text{oder} \quad \alpha_\nu = -\frac{\omega}{a_n(M_n + 1)} \quad (6.15)$$

ableiten. Ist das Strömungsfeld aus mehreren Fluidschichten ( $N > 0$ ) zusammengesetzt, sind in den Unterschichten ebenfalls diejenigen Lösungen physikalisch plausibel, die eine in negative  $z$ -Richtung wandernde Welle beschreiben.

Für jede Fluidschicht  $n$  sind nun die komplexen Koeffizienten  $\tilde{w}_{n,\nu}$ ,  $A_{n,\nu}$  und  $B_{n,\nu}$  zu bestimmen. Lässt sich für  $A_{n,\nu}$  aus der Randbedingung (6.3) und Gleichung (6.8) der Zusammenhang

$$A_{n,\nu} = \frac{i}{\gamma_{n,\nu}}(\omega + U_n \alpha_\nu) \tilde{w}_{n,\nu} \quad (6.16)$$

ableiten, so ergeben sich die verbleibenden Koeffizienten aus der Kopplung der an einer  $n$ -ten Unterschicht angrenzenden Wirbelschichten:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w}_{n+1,\nu} \\ B_{n+1,\nu} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_{n,\nu} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_{n,\nu} \\ B_{n,\nu} \end{Bmatrix}. \quad (6.17)$$

Die Komponenten der lokalen Transfermatrizen  $\mathbf{G}_{n,\nu}$  lassen sich aus den Randbedingungen (6.4), (6.5) und der Sommerfeld'schen Strahlungsbedingung bestimmen:

$$G_{n,\nu 11} = \cos(\kappa_{n,\nu}) \quad (6.18)$$

$$G_{n,\nu 12} = \frac{i\gamma_{n,\nu}}{\omega + U_n \alpha_\nu} \sin(\kappa_{n,\nu}) \quad (6.19)$$

$$G_{n,\nu 21} = \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \frac{(\omega + U_n \alpha_\nu)^2}{\omega + U_{n+1} \alpha_\nu} \frac{i}{\gamma_{n,\nu}} \sin(\kappa_{n,\nu}) \quad (6.20)$$

$$G_{n,\nu 22} = \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \frac{\omega + U_n \alpha_\nu}{\omega + U_{n+1} \alpha_\nu} \cos(\kappa_{n,\nu}) \quad (6.21)$$

mit

$$\kappa_{n,\nu} = \delta_n \gamma_{n,\nu}. \quad (6.22)$$

Aus den lokalen Transfermatrizen  $\mathbf{G}_{n,\nu}$  ergibt sich die globale Transfermatrix  $\mathbf{H}_\nu$ :

$$\mathbf{H}_\nu = \prod_{n=1}^N \mathbf{G}_{N-n,\nu}. \quad (6.23)$$

Diese setzt die komplexen Koeffizienten des Grenzschichtrandes ( $\tilde{w}_{N,\nu}$ ,  $B_{N,\nu}$ ) mit jenen der oszillierenden Wand ( $\tilde{w}_0$ ,  $B_0$ ) in Beziehung. Aus der vorgegebenen komplexen Amplitude  $\tilde{w}_{0,\nu}$  (Gleichung (6.10)) lässt sich nun mittels

$$B_{0,\nu} = -\frac{h_{\nu 21} + \frac{\omega + U_{N,\nu}}{\gamma_{N,\nu}} h_{\nu 11}}{h_{\nu 22} + \frac{\omega + U_{N,\nu}}{\gamma_{N,\nu}} h_{\nu 12}} \tilde{w}_0 \quad (6.24)$$

das Störpotential  $\phi'_{0,\nu}$  nach Gleichung (6.11) bestimmen und über die Bernoulli-Gleichung der Zusammenhang

$$c'_{p n,\nu} = -\frac{\rho_n}{q_N} \left( \frac{\partial \phi'_{n,\nu}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \phi'_{n,\nu}}{\partial x} \right) \quad (6.25)$$

und somit die Lösung des Stördruckfeldes  $c_{p_n}'(x, z_n, t)$  sowie die gesuchte Stördruckverteilung  $c_{p_0}'(x, z_0 = 0, t)$  auf der Wand  $w_0(x, t)$  ableiten. Hierbei gilt analog zu Gleichung (6.7) und (6.8) das Superpositionsprinzip:

$$c_{p_n}' = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{p_{n,\nu}}' \quad (6.26)$$

mit

$$c_{p_{n,\nu}}' = \bar{c}_{p_{n,\nu}}' e^{i\omega t} = \tilde{c}_{p_{n,\nu}}' e^{i(\omega t + \alpha_\nu x)} . \quad (6.27)$$

Sind die komplexen Amplituden  $\tilde{w}_{n,\nu}$  und  $\tilde{c}_{p_{n,\nu}}'$  allgemein durch die komplexe Zahl  $\tilde{z}_{n,\nu}$  repräsentiert, so bietet es sich an gegebener Stelle an, diese über die Amplitude  $|\tilde{z}_{n,\nu}|$  und die Phase  $\varphi_{\tilde{z}_{n,\nu}}$  auszudrücken:

$$\tilde{z}_{n,\nu} = |\tilde{z}_{n,\nu}| e^{i\varphi_{\tilde{z}_{n,\nu}}} \quad (6.28)$$

mit

$$|\tilde{z}_{n,\nu}| = \sqrt{\Re(\tilde{z}_{n,\nu})^2 + \Im(\tilde{z}_{n,\nu})^2} \quad \text{und} \quad \varphi_{\tilde{z}_{n,\nu}} = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(\tilde{z}_{n,\nu})}{\Re(\tilde{z}_{n,\nu})} \right) . \quad (6.29)$$

*Bemerkung 6.1:* Im Sinne einer übersichtlichen Darstellung seien die Formulierungen in den weiteren Ausführungen wie folgt vereinfacht:

- Da lediglich die Stördruckanteile betrachtet werden, sei auf die entsprechende Kennzeichnung  $(\cdot)'$  verzichtet.
- In Hinblick auf einen sinnvollen Vergleich der analytischen Ergebnisse mit Lösungen der Euler- und RANS-Gleichungen werden für die Zustandsgrößen der äußeren Fluidschicht ( $n = N$ ) die in aerodynamischen Studien üblichen Indizierungen  $q_N = q_\infty$ ,  $U_N = U_\infty$ ,  $M_N = M_\infty$  und  $a_N = a_\infty$  verwendet.
- Sofern nicht anders angegeben, sei die Druckverteilung in einer Fluidschicht stets auf  $z_n = 0$  bezogen, d.h.  $c_{p_n} \equiv c_{p_n}(x, z_n, t)|_{z_n=0}$ . Gleiches gilt für die komplexen Stördruckamplituden  $\bar{c}_{p_n}$  und  $\tilde{c}_{p_n}$ .

### 6.2.2 Methodik zur Analyse der generalisierten Luftkräfte

In Abschnitt 2.1 und 2.2 wurde gezeigt, wie die Mechanismen aeroelastischer Instabilitäten mit den Eigenschaften der generalisierten Luftkräfte nach Gleichung (2.3) zusammenhängen. Hierauf aufbauend wird mittels der quantitativen Verteilung jener Kräfte im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum eine Methodik für die Analyse des Grenzschichteinflusses erarbeitet.

Der für eine periodische Störung des Fluids erforderliche Energieaufwand lässt sich im Frequenzbereich über den Imaginärteil der generalisierten Luftkraft  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{rs}(M_\infty, k))$  ausdrücken. Diese sei in Analogie zur allseitig eingespannten ebenen Schale über die Länge  $L$  und Breite  $B$  einer rechtwinkligen Referenzfläche  $A_0$  ausgewertet. Aus Gleichung (2.3) leitet sich somit der Zusammenhang

$$\bar{\bar{Q}}_{rs} = \frac{1}{q_r} \int_0^B \int_0^L \bar{c}_{p_0} \psi_s \, dx \, dy \quad (6.30)$$

ab. Die analytische Bestimmung der komplexen Stördruckamplitude  $\bar{c}_{p0}$  erlaubt nun, den Beitrag der stromab ( $\nu = -r$ ) und der stromauf ( $\nu = r$ ) wandernden Wellenkomponente zum Gesamtenergie transfer isoliert voneinander zu betrachten. So ergibt sich nach Substitution der Gleichung (6.26) in (6.30) die generalisierte Luftkraft auf die Schwingungsform  $\psi_s = \sin(\alpha_{\nu=s}x)$ :

$$\bar{Q}_{rs} = \frac{1}{\bar{q}_r} \int_0^B \int_0^L (\bar{c}_{p0,\nu=r} + \bar{c}_{p0,\nu=-r}) \sin(\alpha_{\nu=s}x) dx dy. \quad (6.31)$$

Für  $r = s$  lässt sich Gleichung (6.31) mithilfe des Zusammenhangs (6.27) vereinfachen:

$$\bar{Q}_{ss} = \frac{A_0}{\bar{q}_s} \frac{1}{2} i \left( \underbrace{\tilde{c}_{p0,\nu=s}}_{\text{stromauf}} - \underbrace{\tilde{c}_{p0,\nu=-s}}_{\text{stromab}} \right). \quad (6.32)$$

Darüber hinaus soll in dieser Arbeit die zugrundeliegende These aus der Literatur bewertet werden, nach welcher der stromab wandernden Wellenkomponente für  $M_\infty \rightarrow 1$  eine besondere Bedeutung in Bezug auf den Energietransfer zukommt. Fung [10] untersucht in diesem Zusammenhang die Dynamik des Grenzschichtandes  $w_1(x, t)$  und verfolgt den Ansatz, die Lösung als Überlagerung einer stehenden und einer stromab wandernden Wellenkomponente zu beschreiben:

$$\bar{w}_1 = \tilde{w}_{1,\nu=s} e^{i\alpha_{\nu=s}x} + \tilde{w}_{1,\nu=-s} e^{i\alpha_{\nu=-s}x} \quad (6.33)$$

$$= 2i\tilde{w}_{1,\nu=s} \sin(\alpha_{\nu=s}x) + (\tilde{w}_{1,\nu=s} + \tilde{w}_{1,\nu=-s}) e^{i\alpha_{\nu=-s}x}. \quad (6.34)$$

Aus den Untersuchungen geht jedoch nicht hervor, wie die Schwingung des Grenzschichtandes die Stördruckverteilung direkt auf der oszillierenden Wand beeinflusst. Daher sei der Ansatz auf die komplexe Stördruckamplitude  $\bar{c}_{p0}(x)$  übertragen:

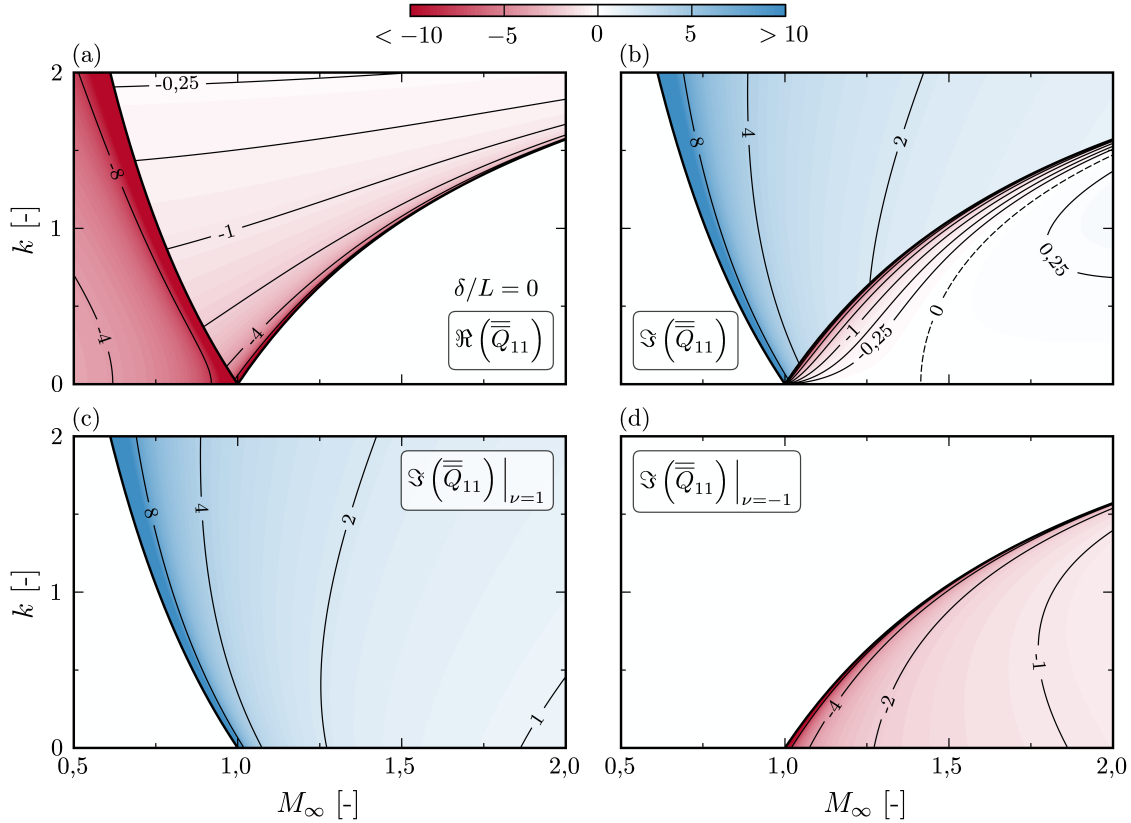
$$\bar{c}_{p0} = 2i\tilde{c}_{p0,\nu=s} \sin(\alpha_{\nu=s}x) + (\tilde{c}_{p0,\nu=s} + \tilde{c}_{p0,\nu=-s}) e^{i\alpha_{\nu=-s}x}. \quad (6.35)$$

Analog zum obigen Vorgehen kann nun die generalisierte Luftkraft  $\bar{Q}_{rs}$  für  $r = s$  durch Substitution der Gleichung (6.35) in (6.30) in einen Anteil der stehenden und einen Anteil der stromab wandernden Welle aufgeteilt werden:

$$\bar{Q}_{ss} = \frac{A_0}{\bar{q}_s} \frac{1}{2} i \left( \underbrace{2\tilde{c}_{p0,\nu=s}}_{\text{stehend}} - \underbrace{(\tilde{c}_{p0,\nu=s} + \tilde{c}_{p0,\nu=-s})}_{\text{stromab}} \right). \quad (6.36)$$

Gleichung (6.36) lässt sich leicht in Gleichung (6.32) überführen und verdeutlicht somit, dass die in dieser Arbeit verfolgte Aufteilung der Stördruckverteilung in zwei entgegengesetzt wandernde Wellen und die von Fung [10] gewählte Darstellung einer stehenden und einer überlagerten stromab wandernden Wellenkomponente physikalisch identische Phänomene beschreiben. So korreliert ein positiver Realteil der komplexen Stördruckamplitude einer stromauf wandernden Welle ( $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=s}) > 0$ ) mit einem dämpfenden Charakter der generalisierten Luftkraft, während ein positiver Realteil der komplexen Stördruckamplitude einer stromab wandernden Welle ( $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=-s}) > 0$ ) anfachend wirkt. Folglich wird dem Strömungsfeld effektiv Energie entzogen, wenn  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=-s}) > \Re(\tilde{c}_{p0,\nu=s})$ .

Unter welchen Bedingungen dieser Zustand eintreten kann, sei zunächst für eine grenzschichtfreie Strömung ( $N = 0$ ) mit  $\nu = \pm 1$  untersucht. Die komplexe Stördruckamplitude



**Abbildung 6.5:** Komponenten der generalisierten Luftkraft  $\bar{\bar{Q}}_{11}$  in einer grenzschichtfreien Strömung.

$\tilde{c}_{p0,\nu}$  ergibt sich nach Gleichung (6.25) aus:

$$\tilde{c}_{p0,\nu} = \frac{2i}{U_\infty^2 \gamma_{\infty,\nu}} (\omega + U_\infty \alpha_\nu)^2 \tilde{w}_{0,\nu} . \quad (6.37)$$

Die aus der Substitution der Gleichung (6.37) in Gleichung (6.31) resultierende generalisierte Luftkraft  $\bar{\bar{Q}}_{11}$  ist in Abbildung 6.5 für einen  $M_\infty$ - $k$ -Parameterbereich abgebildet, der alle in Kapitel 5 beobachteten Phänomene abdeckt. So zeigt Abbildung 6.5(b), dass für kleine reduzierte Frequenzen  $k$  in einer supersonischen Anströmung ( $M_\infty > 1$ ) die Imaginärteile der generalisierten Luftkraft  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{11})$  negativ sein können, da hier der anfachende Charakter der stromab wandernden Wellenkomponente (vgl.  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{11})|_{\nu=-1} < 0$  in Abbildung 6.5(d)) gegenüber dem dämpfenden Charakter der stromauf wandernden Wellenkomponente (vgl.  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{11})|_{\nu=1} > 0$  in Abbildung 6.5(c)) überwiegt. Dies deckt sich mit den Beobachtungen aus Kapitel 5, denen zufolge im Bereich niedriger subsonischer Machzahlen  $M_\infty$  und Frequenzen  $k$  ein Ein-Freiheitsgrad-Flattern der ersten Eigenschwingungsform auftreten kann. Darüber hinaus deutet  $\Re(\bar{\bar{Q}}_{11}) < 0$  und  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{11}) = 0$  für  $k \rightarrow 0$  in einer subsonischen Anströmung ( $M_\infty < 1$ ) auf aeroelastisches Beulen hin. Auch dies ließ sich auf empirischer Basis in Kapitel 5 nachweisen. Im hohen Überschall sind die Imaginärwerte der generalisierten Luftkraft hingegen klein, aber positiv ( $\Im(\bar{\bar{Q}}_{11}) > 0$ ) und korrelieren mit dem in den vorangegangenen Studien beobachteten Mehr-Freiheitsgrad-Flattern. Eine Analyse der generalisierten Luftkräfte für höhere Eigenschwingungsformen erfolgt in Abschnitt 6.4.2.

Da aeroelastisches Beulen aus technischer Sicht gegenüber den dynamischen Instabilitäten weniger relevant ist und die Grenzschicht im hohen Machzahlbereich an Einfluss auf das Mehr-Freiheitsgrad-Flattern verliert, der niedrige subsonische Bereich jedoch als kritisch bezüglich der aeroelastischen Stabilitätsgrenze eingestuft werden kann, konzentrieren sich die weiteren Studien primär auf den Mechanismus des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns und den damit verbundenen Energietransfer auf die anregende Schwingungsform, d.h.  $\bar{Q}_{ss}$ . Zu diesem Zweck sei nach folgender Methodik weiter vorgegangen:

- 1) Phänomenologisch orientierte Analyse der komplexen Stördruckamplituden  $\tilde{c}_{p0,\nu=1}$  und  $\tilde{c}_{p0,\nu=-1}$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum für eine grenzschichtfreie Potentialströmung ( $N = 0$ ). Hierbei sei lediglich  $\nu = \pm 1$  von Interesse, da Vielfache der Wellenzahl  $\alpha_\nu = \nu\pi/L$  qualitativ zu identischen Resultaten führen.
- 2) Wiederholung von Schritt 1 für ein System mit einer einzelnen Unterschicht ( $N = 1$ ).
- 3) Variation des Geschwindigkeitsprofils durch die Modellierung mehrerer, miteinander interagierender Unterschichten ( $N > 1$ ).

Hierbei sind zwei modellbedingte Einschränkungen zu berücksichtigen. Zum einen muss die Schichtdicke  $\delta_n$  deutlich kleiner als die (reelle) Wellenlänge  $\lambda_{z,\nu} = 2\pi/\Re(\gamma_{0,\nu})$  sein, da bei Vielfachen von  $\lambda_{z,\nu}/4$  Resonanzeffekte auftreten, die zu unphysikalischen Stördrücken innerhalb einer Unterschicht führen. Zwar sind solche Resonanzeffekte an sich physikalisch plausibel, jedoch lässt sich eine räumliche Mittelung des Geschwindigkeitsprofils über Längen, die in der Größenordnung der Wellenlänge der Störungen liegen, nicht mehr rechtfertigen, da dämpfende Einflüsse des subsonischen Teils der Grenzschicht unterschätzt würden. In den folgenden Untersuchungen ist aufgrund der moderaten Grenzschichtdicken ( $\delta_n/L < 0,1$ ) und niedrigen Machzahlen ( $M_\infty \leq 2$ ) stets  $\delta_n/\lambda_{z,\nu} < 0,065$ .

Zum anderen ist zu beachten, dass sich durch eine Fluidschicht  $n$  mit einer konstanten Geschwindigkeitsverteilung  $U_n = V_\nu$  keine Störung ausbreiten kann. Bei einem Großteil der folgenden Betrachtungen ist  $U_n$  jedoch vergleichsweise hoch, da der Fokus auf turbulente Grenzschichtprofile liegt. Des weiteren ist die Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  aufgrund der moderaten Frequenzen  $k$  niedrig, wodurch der Zustand  $U_n = V_\nu$  für  $N = 1$  weit genug außerhalb des betrachteten  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraumes liegt. Für komplexere Geschwindigkeitsprofile ( $N \gg 1$ ) gilt dies aufgrund der geringeren Strömungsgeschwindigkeiten im wandnahen Bereich jedoch nicht mehr, weshalb entsprechende Untersuchungen in Abschnitt 6.2.4 zur Minimierung des Einflusses dieser Modellbeschränkung auf  $k = 0$  beschränkt sind.

### 6.2.3 Wandstördrücke in grenzschichtfreien Systemen

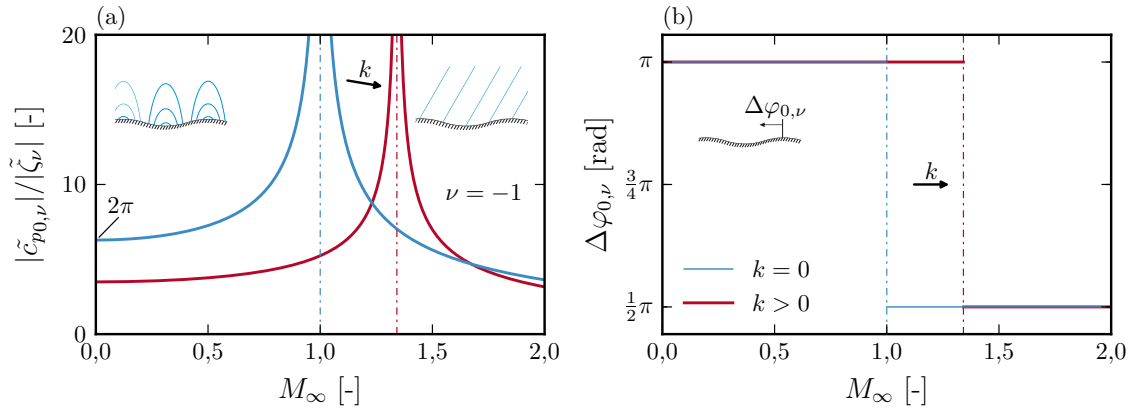
Für eine detailliertere Analyse des Stördruckkoeffizienten  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  sei die Grenzschicht weiterhin vernachlässigt, d.h.  $N = 0$ . Gleichung (6.37) lässt sich auch über die Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  nach Gleichung (6.13) formulieren und somit physikalisch leichter interpretieren:

$$\tilde{c}_{p0,\nu} = 2i\alpha_\nu^2 \frac{\tilde{w}_{0,\nu}}{\gamma_{0,\nu}} \frac{(U_\infty - V_\nu)^2}{U_\infty^2}. \quad (6.38)$$

Abbildung 6.6 zeigt den auf die Anregungsamplitude  $|\tilde{\zeta}_\nu| = |\tilde{w}_{0,\nu}|/L$  normierten Betrag des Wandstördrucks  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|/|\tilde{\zeta}_\nu|$  und die durch  $\text{sgn}(\nu)$  gleichgerichtete Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{0,\nu}$  mit

$$\Delta\varphi_{0,\nu} = \text{sgn}(\nu) \left( \varphi_{\tilde{c}_{p0,\nu}} - \varphi_{w0,\nu} \right) \quad (6.39)$$





**Abbildung 6.6:** Einfluss der reduzierten Frequenz  $k$  auf die Stördruckamplitude (links) und Phasenverschiebung (rechts) für  $\nu = -1$ .

für  $k = 0$ , d.h. für die Überströmung einer stehenden, welligen Wand. Aus der Dispersionsrelation (6.12) lässt sich die komplexe Wellenzahl  $\gamma_{0,\nu}$  für  $M_{0,\nu} = M_\infty$  bestimmen und somit der Zusammenhang

$$\frac{|\tilde{c}_{p0,\nu}|}{|\tilde{\zeta}_\nu|} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, & M_\infty < 1 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, & M_\infty > 1 \end{cases} \quad (6.40)$$

ableiten. Für eine Unterschallströmung ( $M_\infty < 1$ ) spiegelt der bereits von Prandtl und Glauert beschriebene Zusammenhang (6.40) den elliptischen Typus der konvektiven Wellengleichung (6.2) wieder [121]. Entsprechend breiten sich die bewegungsinduzierten Störungen mit der Schallgeschwindigkeit  $a_\infty$  im Strömungsfeld aus und überlagern sich zu einer evaneszenten Welle in  $z$ -Richtung. Die um den Faktor  $1/\sqrt{1 - M_\infty^2}$  mit der Machzahl  $M_\infty$  zunehmende Stördruckamplitude führt nach dem Modell der linearisierten Potentialströmung für  $M_\infty = 1$  zu einer Singularität. Physikalisch lässt sich dies dadurch erklären, dass sich eine Störung bis in die Unendlichkeit ausbreiten müsste, wozu unendlich große Kräfte erforderlich wären. Das Stördruckmaximum ist in der stationären Unterschallströmung um  $\Delta\varphi_{0,\nu} = \pi$  gegenüber der welligen Wand phasenverschoben.

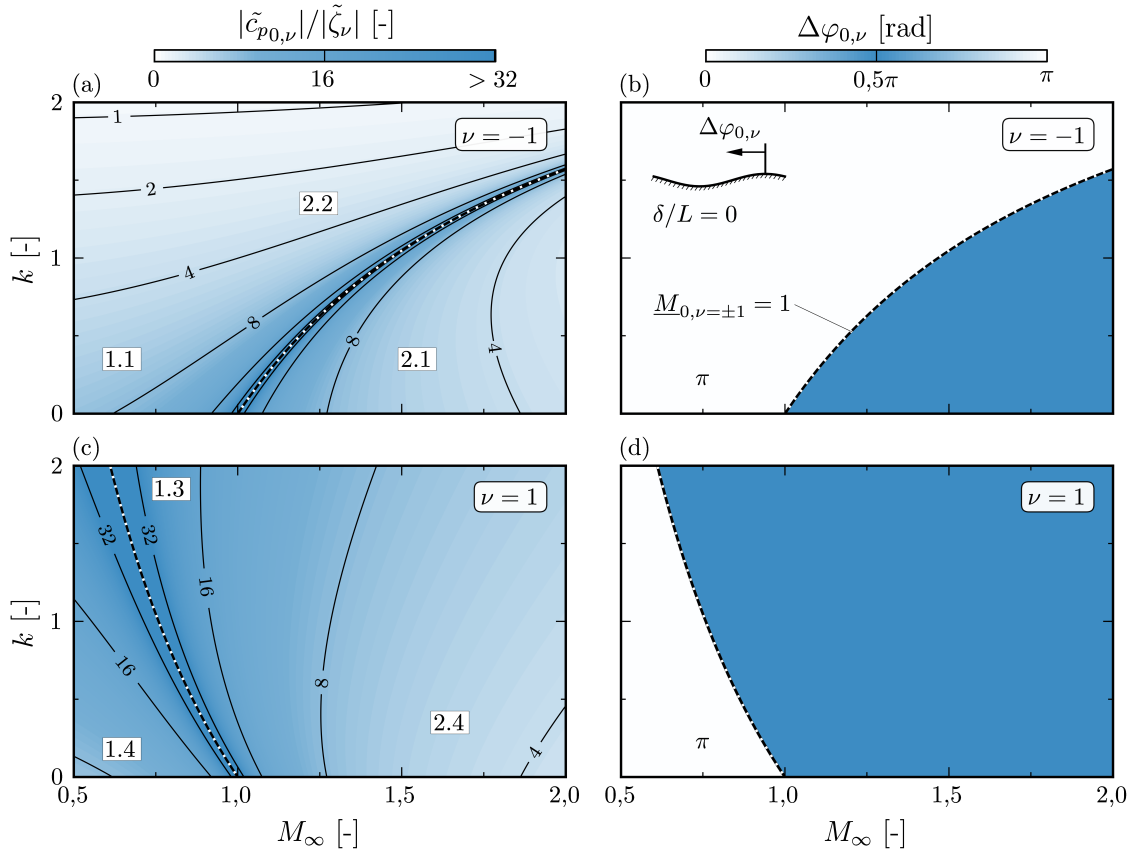
Die Abnahme der Stördruckamplitude um den Faktor  $1/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$  spiegelt indessen den hyperbolischen Typus der Differentialgleichung (6.2) für  $M_\infty > 1$  wieder. Die Störungen des Strömungsfeldes überlagern sich nun zu einer ungedämpften, ebenen Welle, deren Fronten unter dem Mach'schen Winkel

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{M_\infty}\right) \quad (6.41)$$

gegenüber der Anströmrichtung geneigt sind. Das Stördruckmaximum ist in Bezug auf die wellige Wand um  $\Delta\varphi_{0,\nu} = 0,5\pi$  phasenverschoben.

Die vorangegangenen Erläuterungen genügen zunächst für die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen zur Überströmung schwach gewellter Wände. Für vertiefende Abhandlungen zu diesem Thema sei daher auf gängige Literatur der Strömungsmechanik [121, 122] und insbesondere auf die Studien von Ackeret [123] verwiesen. Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, wie sich die Betrachtungen auf den Fall einer mit der Phasenge-





**Abbildung 6.7:** Stromab (oben) und stromauf (unten) wandernde Wellenkomponente des Stördrucks  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  in einer grenzschichtfreien Strömung.

schwindigkeit  $V_\nu \neq 0$  in  $x$ -Richtung ausbreitenden, welligen Wand übertragen lassen. Aufgrund der abnehmenden ( $\nu = -1$ ) bzw. zunehmenden ( $\nu = 1$ ) Relativgeschwindigkeit  $\underline{U}_{0,\nu} = U_\infty - V_\nu$  nimmt ein Beobachter im körperfesten Referenzsystem wieder einen stationären Strömungszustand über einer welligen Wand wahr, nun jedoch mit der entsprechend reduzierten ( $\nu = -1$ ) respektive erhöhten ( $\nu = 1$ ) relativen Machzahl

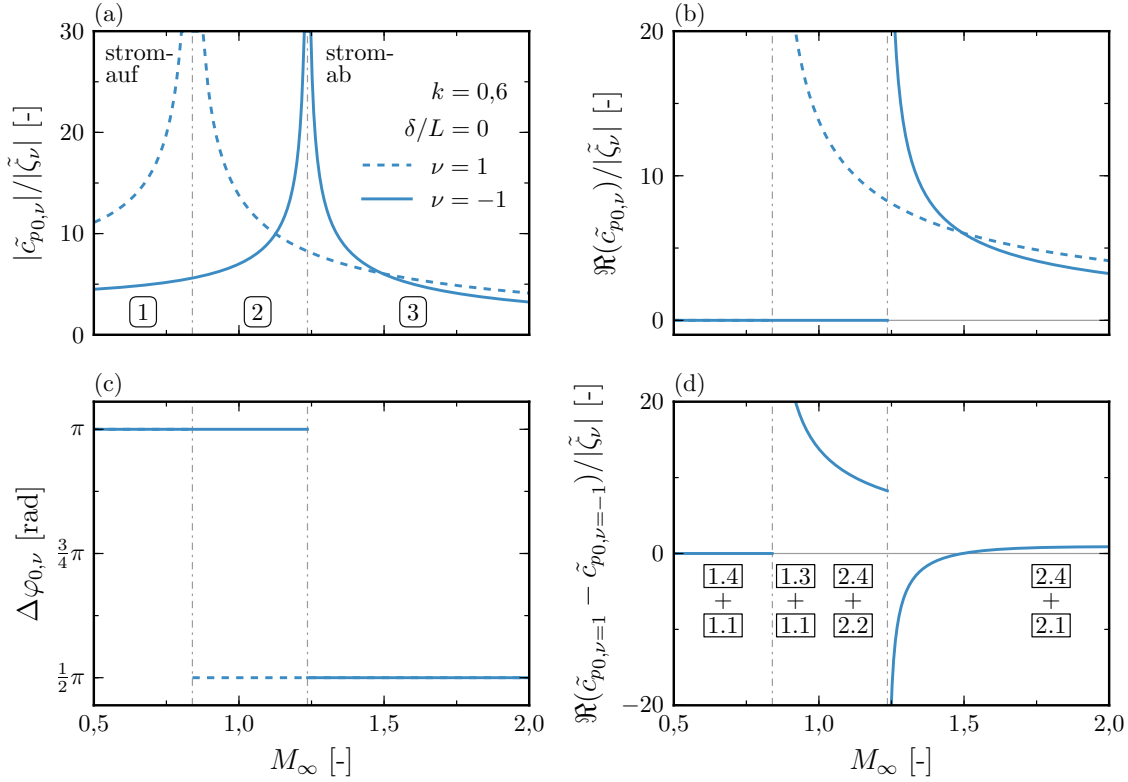
$$\underline{M}_{0,\nu} = \frac{\underline{U}_{0,\nu}}{a_0} = \frac{U_\infty - V_\nu}{a_\infty}. \quad (6.42)$$

Abbildung 6.6 verdeutlicht dies exemplarisch für eine stromab wandernde Welle ( $\nu = -1$ ). Der singuläre Zustand verschiebt sich mit zunehmender Frequenz  $k$  in den Bereich höherer Machzahlen  $M_\infty$ . Aus Gleichung (6.38) lässt sich hierfür der Zusammenhang

$$\underline{M}_{0,\nu} = 1 \Leftrightarrow \frac{\nu\pi}{k + \nu\pi} = M_\infty \quad (6.43)$$

ableiten. Für  $\underline{M}_{0,\nu} < 1$  beträgt die Phasenverschiebung nach Gleichung (6.39)  $\Delta\varphi_{0,\nu} = \pi$  und für  $\underline{M}_{0,\nu} > 1$  aufgrund des supersonischen Strömungscharakters  $\Delta\varphi_{0,\nu} = 0,5\pi$ .

Abbildung 6.7 zeigt die normierte Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|/|\tilde{\zeta}_\nu|$  und Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{0,\nu}$  stromab ( $\nu = -1$ ) und stromauf ( $\nu = 1$ ) wandernder Wellen im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum. Die eingerahmte Nummerierung verweist hierbei auf die in den Abbildungen 6.3 und 6.4 illustrierten Lösungszustände. Es zeigt sich, dass für die in dieser



**Abbildung 6.8:** Komponenten des Stördrucks  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  für  $k = 0,8$  in einer grenzschichtfreien Strömung.

Arbeit relevanten Anwendungsfälle lediglich die stromab wandernde Wellenkomponente einen subsonischen Lösungscharakter im Überschall aufweisen kann, d.h.  $\underline{M}_{0,\nu=-1} < 1$  für  $M_\infty > 1$  (2.2), und entsprechend lediglich die stromauf wandernde Wellenkomponente einen supersonischen Charakter im Unterschall aufweisen kann, d.h.  $\underline{M}_{0,\nu=1} > 1$  für  $M_\infty < 1$  (1.3). Der in Abbildung 6.7(a) dargestellte Lösungscharakter ist qualitativ durch zwei Mechanismen geprägt: Mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  strebt der singuläre Zustand  $\underline{M}_{0,\nu=-1} = 1$  tangential gegen  $k \rightarrow \pi$  und führt nach der Prandtl-Glauert-Ackeret'schen Regel zu einem Anstieg des Betrages der Druckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu=-1}|$ . Gleichzeitig ist jedoch die Phasengeschwindigkeit  $V_{\nu=-1}$  für  $k = \pi$  identisch mit der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  und führt somit bei zunehmender Frequenz  $k$  zu einer Abnahme der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu=-1}|$ .

Hinsichtlich des Energietransfers zwischen Strömung und Struktur lassen sich in dem betrachteten  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum drei phänomenologisch verschiedene Zustandsbereiche identifizieren, die mittels Abbildung 6.8 (gekennzeichnet durch [1.] bis [3.]) für eine konstante Frequenz von  $k = 0,8$  näher erläutert werden:

- [1.] Bei einer Überlagerung zweier subsonischer Lösungen ([1.1] + [1.4]) findet aufgrund der Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi_{0,\nu=\pm 1} = \pi$  bei keiner der Teillösungen ein effektiver Energietransfer mit der anregenden Struktur statt.
- [2.] Weist allein die stromauf wandernde Wellenkomponente mit  $\Delta\varphi_{0,\nu=1} = 0,5\pi$  einen Überschallcharakter auf, so ist  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=1}) > 1$ . Somit wird nach Gleichung (6.32) Energie an das Fluid abgeführt. Da die stromab wandernde Teillösung zugleich einer

subsonische Relativströmung ausgesetzt ist ( $M_{0,\nu=-1} < 1 \Rightarrow \Delta\varphi_{0,\nu=-1} = \pi$ ), liefert sie keinen Beitrag zur Gesamtenergiebilanz der superpositionierten Lösung ([1.1] + [1.3] und [2.2] + [2.4]). Nach Gleichung (6.32) korreliert der Zustand  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=1}) > \Re(\tilde{c}_{p0,\nu=-1})$  mit  $\Im(\bar{Q}_{11}) > 0$  in Abbildung 6.5(b) und hat somit einen dämpfenden Charakter.

- [3.] Schließlich können beide Teillösungen  $\tilde{c}_{p0,\nu=-1}$  und  $\tilde{c}_{p0,\nu=1}$  einen Überschallcharakter aufweisen ( $\Delta\varphi_{0,\nu=1} = \Delta\varphi_{0,\nu=-1} = 0,5\pi$ , [2.1] + [2.4]). Da sich das relative Strömungsfeld der stromab wandernden Wellenkomponente im niedrigen Überschall ( $M_\infty \rightarrow 1^+$ ) dem singulären Zustand  $M_{0,\nu=-1} = 1$  nähert, überwiegt die Stördruckamplitude der stromab wandernden Wellenkomponente, d.h.  $|\tilde{c}_{p0,\nu=-1}| > |\tilde{c}_{p0,\nu=1}|$ . Somit tritt nun der Fall ein, dass  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=-1}) > \Re(\tilde{c}_{p0,\nu=1})$ . Dies korreliert nach Gleichung (6.32) mit einem negativen Gesamtenergieaufwand zur Störung des Fluids, d.h.  $\Im(\bar{Q}_{11}) < 0$ . Hinsichtlich des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns deutet dieser Zusammenhang auf einen destabilisierenden Charakter hin. Mit weiter zunehmender Machzahl  $M_\infty$  kehrt sich dieser Effekt wieder um, jedoch ist die Differenz zwischen den beiden Stördruckamplituden vergleichsweise gering und somit der Gesamtenergieaufwand  $\Im(\bar{Q}_{11})$ , wenngleich nach Gleichung (6.32) positiv, nominell gering im Vergleich zum niedrigen supersonischen Machzahlbereich.

### 6.2.4 Wandstördrücke in grenzschichtbehafteten Systemen

Das im vorangegangenen Abschnitt betrachtete System sei im Folgenden unter Berücksichtigung einer Grenzschicht analysiert, die in einem ersten Approximationsschritt durch eine einzelne Unterschicht ( $N = 1$ ) mit einer Dicke  $\delta/L = 0,1$  modelliert wird. Hierbei sei von einer konstanten Geschwindigkeitsverteilung  $M_0 = 0,8M_\infty$  ausgegangen. Dies entspricht etwas weniger als dem Mittelwert eines Geschwindigkeitsprofils nach dem 1/7-Potenzgesetz (vgl. [116]), wodurch sich schwach ausgeprägte Grenzschichteinflüsse bei hohen Machzahlen besser interpretieren lassen. Die komplexe Stördruckamplitude ergibt sich nun aus:

$$\tilde{c}_{p0,\nu} = 2i\alpha_\nu^2 \frac{\tilde{w}_{0,\nu}}{\gamma_{0,\nu}} \frac{(U_\infty - V_\nu)^2}{U_\infty^2} R_{0,\nu} . \quad (6.44)$$

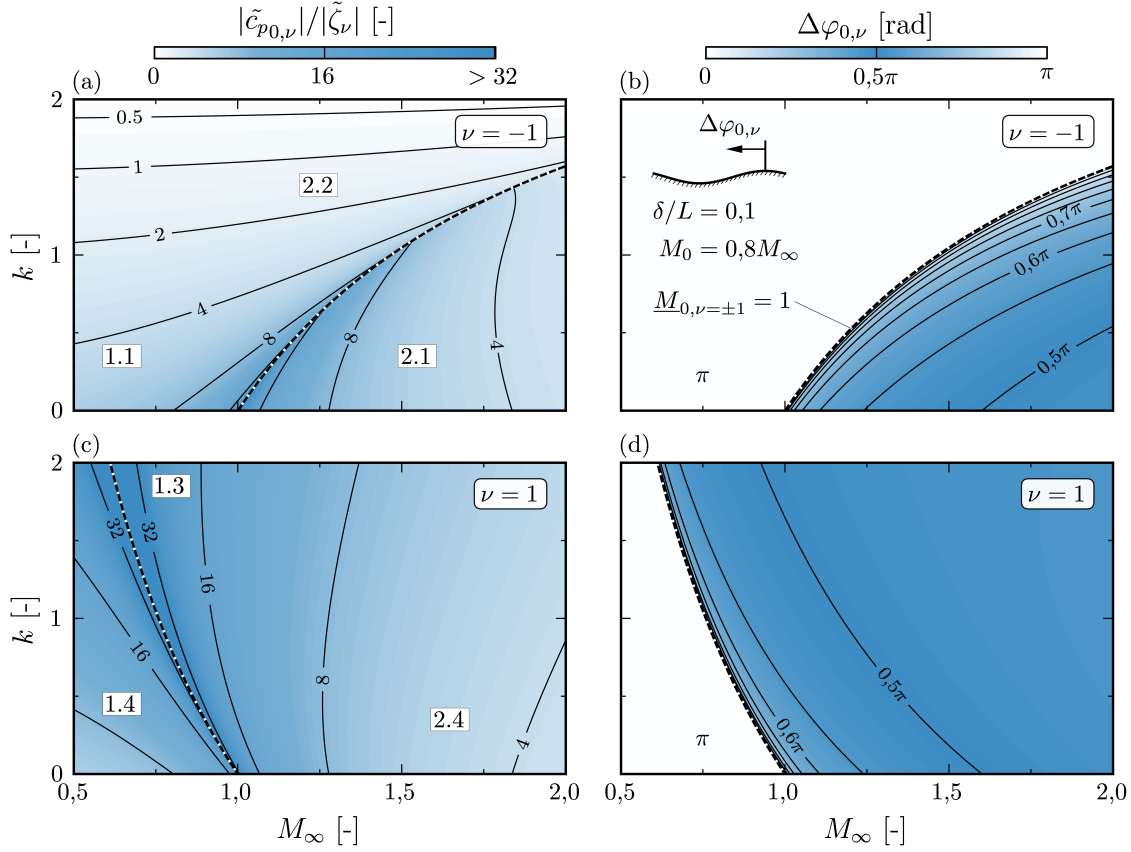
Gleichung (6.44) unterscheidet sich von Gleichung (6.38) lediglich durch den Parameter  $R_{0,\nu}$ . Dieser beschreibt somit das komplexe Amplitudenverhältnis der Stördrücke in einer grenzschichtbehafteten und grenzschichtfreien Strömung und lässt sich daher auch als komplexwertige Einflussfunktion der Grenzschicht verstehen. Für  $z = 0$  ist

$$R_{0,\nu} = \frac{\tilde{c}_{p0,\nu}(N=1)}{\tilde{c}_{p0,\nu}(N=0)} = \frac{\cos(\kappa_{0,\nu}) + \frac{1}{\sigma_{0,\nu}} \sin(\kappa_{0,\nu})}{\cos(\kappa_{0,\nu}) - \sigma_{0,\nu} \sin(\kappa_{0,\nu})} \quad (6.45)$$

mit

$$\sigma_{0,\nu} = -i \frac{\gamma_{0,\nu}}{\gamma_{\infty,\nu}} \frac{\rho_\infty (U_\infty - V_\nu)^2}{\rho_0 (U_0 - V_\nu)^2} = -i \frac{\gamma_{0,\nu}}{\gamma_{\infty,\nu}} \frac{q_{\infty,\nu}}{q_{0,\nu}} . \quad (6.46)$$

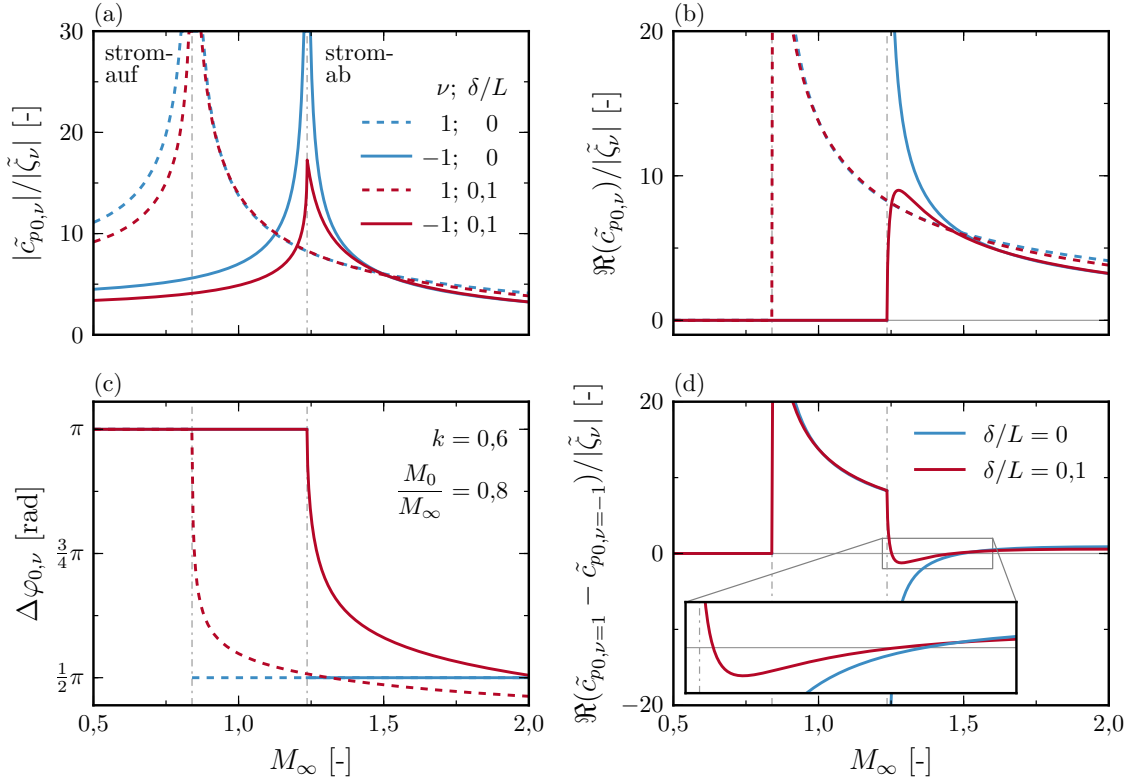
In Analogie zu den vorangegangenen Analysen des grenzschichtfreien Systems (vgl. Abbildung 6.7) zeigt Abbildung 6.9 die Verteilung der Stördruckbeiwerte  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  nach Gleichung (6.44) für die stromauf und stromab wandernde Welle im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum, jeweils in Form des normierten Betrages  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|/|\tilde{\zeta}_\nu|$  und der Phase  $\Delta\varphi_{0,\nu}$ . Hierbei fällt



**Abbildung 6.9:** Stromab (oben) und stromauf (unten) wandernde Wellenkomponente des Stördrucks  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  in einer grenzschichtbehafteten Strömung.

zunächst auf, dass es für  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1$  zu einer signifikanten Reduktion der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  im Vergleich zur reibungsfreien Lösung kommt. Für  $\underline{M}_{0,\nu} = 1$  ergibt sich eine Unstetigkeit. Des weiteren weicht die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{0,\nu}$  für  $\underline{M}_{0,\nu=\pm 1} > 1$  von der grenzschichtfreien Lösung  $\Delta\varphi_{0,\nu} = 0,5\pi$  ab und nähert sich für  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1^+$  zunehmend der subsonischen Lösung, d.h.  $\Delta\varphi_{0,\nu} \rightarrow \pi$ .

Um diesen Aspekt detaillierter zu betrachten, gibt Abbildung 6.10 die Ergebnisse aus Abbildung 6.9 für einen Schnitt durch den  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum bei  $k = 0,8$  wieder (rote Kurven) und stellt diese den Ergebnissen des grenzschichtfreien Systems (blaue Kurven, vgl. Abbildung 6.8) gegenüber. Die Reduktion der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  für  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1$  (vgl. Abbildung 6.10(a)) und die zunehmenden Abweichung der Phasenverschiebung von der supersonischen Lösung  $\Delta\varphi_{0,\nu} = 0,5\pi$  (vgl. Abbildung 6.10(c)) für  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1^+$  resultiert in eine Abnahme des effektiven Energieaustausches mit dem Fluid, ausgedrückt durch eine nominelle Abnahme von  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu})$  (vgl. Abbildung 6.10(b)). Mit zunehmender Relativmachzahl  $\underline{M}_{0,\nu}$  nimmt der Einfluss der Grenzschicht wieder ab. Daraus lässt sich eine Erklärung für die hohe Beeinflussung des Gesamtenergie transfers  $\Im(\overline{Q}_{11})$  im niedrigen Überschallbereich ableiten. In Abschnitt 6.2.3 wurde erläutert, dass sich der singuläre Zustand  $\underline{M}_{0,\nu} = 1$  für die stromab wandernde Welle mit zunehmender Frequenz  $k$  in den Bereich supersonischer Machzahlen  $M_\infty > 1$  verschiebt, da die Relativgeschwindigkeit  $\underline{U}_{0,\nu=-1}$  abnimmt. Für die stromauf wandernde Welle kommt es entsprechend zu einer Verschiebung des singulären Zustandes in Richtung abnehmender subsonischer Machzahlen  $M_\infty < 1$ . Aus diesem



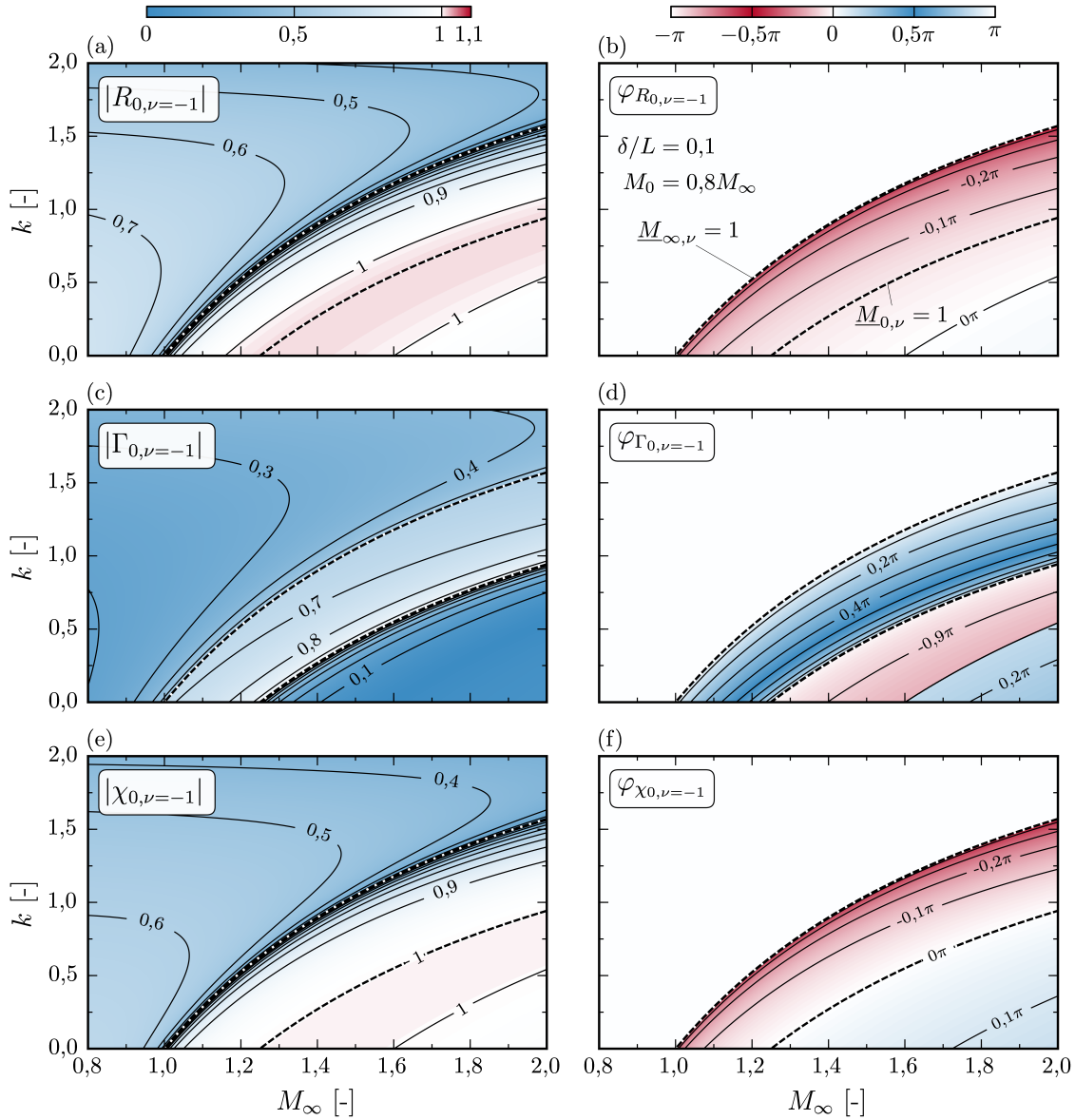
**Abbildung 6.10:** Komponenten des Stördrucks  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  für  $k = 0,8$  in einer grenzschichtfreien (blau) und grenzschichtbehafteten (rot) Strömung.

Zusammenhang geht hervor, dass im niedrigen Überschall der Unterschied zwischen der grenzschichtbehafteten und -freien Lösung für die stromab wandernde Welle deutlich ausgeprägter ist als für die stromauf wandernde Welle. Die damit verbundene Abnahme des Realteils der komplexen Stördruckamplitude  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=-1})$  (anfacher Charakter) überwiegt daher gegenüber der Abnahme von  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=1})$  (dämpfender Charakter). Folglich verkleinert sich nicht nur der Machzahlbereich, in dem  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=-1}) > \Re(\tilde{c}_{p0,\nu=1})$  ist, sondern es kommt ebenfalls zu einer nominellen Abnahme des Gesamtenergie transfers zwischen dem Fluid und der anregenden Struktur, ausgedrückt durch  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu=1} - \tilde{c}_{p0,\nu=-1}) \rightarrow 0$ . Aus Gleichung (6.32) folgt entsprechend  $\Im(\overline{Q}_{11}) \rightarrow 0$ .

### 6.2.5 Detailuntersuchung der Grenzschichtmechanismen

Die vorangegangenen Ergebnisse verdeutlichen, dass die komplexe Stördruckamplitude der stromab wandernden Wellenkomponente  $\tilde{c}_{p0,\nu=-1}$  maßgeblich den Energietransfer zwischen Strömung und Struktur im niedrigen Überschall bestimmt. In welchem Maße dieser Energietransfer durch die idealisierte Grenzschicht beeinflusst wird, lässt sich mithilfe des Stördruckverhältnisses  $R_{0,\nu}$  nach Gleichung (6.45) studieren. Abbildungen 6.11(a) und (b) zeigen die Verteilung von  $R_{0,\nu=-1}$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum, dessen Betrag  $|R_{0,\nu}|$  dem Amplitudenverhältnis

$$|R_{0,\nu}| = \frac{|\tilde{c}_{p0,\nu}|(N=1)}{|\tilde{c}_{p0,\nu}|(N=0)} \quad (6.47)$$



**Abbildung 6.11:** Komponenten der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  (oben), des Reflexionsfaktors  $\Gamma_{0,\nu}$  (mittig) und des komplexen Amplitudenverhältnisses der Grenzschichttrand- und Wandverformung  $\chi_{0,\nu}$  (unten).

und dessen Argument

$$\varphi_{R_{0,\nu}} = \varphi_{\tilde{c}_{p0,\nu}}(N=0) - \varphi_{\tilde{c}_{p0,\nu}}(N=1) \quad (6.48)$$

der Phasenverschiebung zwischen der grenzschichtfreien ( $N=0$ ) und grenzschichtbehafteten Stördruckverteilung ( $N=1$ ) entspricht.

*Bemerkung 6.2:* Zwar beziehen sich die folgenden Diskussionen und die grafischen Darstellungen der Ergebnisse auf die stromab wandernde Wellenkomponente ( $\nu = -1$ ). Dennoch sind die mathematischen Formulierungen allgemeingültig gehalten, da diese ebenso für die stromauf wandernde Wellenkomponente ( $\nu = 1$ ) Gültigkeit haben.

Nach Gleichung (6.45) lässt sich der Grenzschichteinfluss über die Parameter  $\kappa_{0,\nu}$  und  $\sigma_{0,\nu}$

beschreiben, die phänomenologisch wie folgt interpretiert werden können:

- Der Grenzschichtparameter  $\kappa_{0,\nu} = \delta_0 \gamma_{0,\nu}$  (vgl. Gleichung (6.22)) beschreibt den Einfluss der Grenzschichtdicke  $\delta_0$ . Hierbei kann  $\Re(\kappa_{0,\nu})$  als Längenverhältnis von  $\delta_0$  und der wandnormalen Komponente der Wellenlänge  $\lambda_{z0,\nu} = 2\pi/\gamma_{0,\nu}$  interpretiert werden, während  $\Im(\kappa_{0,\nu})$  ein Maß für die Dämpfung der Stördrücke darstellt.
- Der Parameter  $\sigma_{0,\nu}$  nach Gleichung (6.46) ist unabhängig von der Grenzschichtdicke  $\delta_0$ , da sowohl die dynamischen Drücke  $\underline{q}_{n,\nu}$  als auch die Wellenzahlkomponenten  $\gamma_{n,\nu}$  lediglich von den Zustandsgrößen der  $n$ -ten Fluidschicht abhängen. Hierbei erlaubt insbesondere  $\gamma_{n,\nu}$ , das Stördruckfeld physikalisch zu interpretieren und somit Rückschlüsse auf den Grenzschichteinfluss, ausgedrückt durch  $R_{0,\nu}$ , zu ziehen. In diesem Kontext sei auf die Diskussion der Dispersionsrelation (6.12) in Abschnitt 6.2.1 verwiesen, welche die lokale Machzahl  $M_{n,\nu}$  mit der Wellenzahlkomponente  $\gamma_{n,\nu}$  korreliert.

Bei der Analyse des Grenzschichteinflusses sei zudem die Dynamik des Grenzschichtrandes berücksichtigt, um die Erkenntnisse von Fung [10] mit der Energiebilanz zwischen Strömung und Struktur in Einklang zu bringen. In den nachfolgenden Betrachtungen seien dafür die folgenden Parameter eingeführt:

- Das Verhältnis der komplexen Verformungsamplituden

$$\chi_{0,\nu} = \frac{\tilde{w}_{1,\nu}}{\tilde{w}_{0,\nu}} = \frac{1}{\cos(\kappa_\nu) - \sigma_\nu \sin(\kappa_\nu)} \quad (6.49)$$

(vgl. Fung [10]) setzt die Schwingung des Grenzschichtrandes  $\tilde{w}_{1,\nu}$  mit der Wandverformung  $\tilde{w}_{0,\nu}$  in Beziehung. Entsprechend gilt  $|\chi_{0,\nu}| = |\tilde{w}_{1,\nu}|/|\tilde{w}_{0,\nu}|$  und für das Argument  $\varphi_{\chi_{0,\nu}} = \varphi_{\tilde{w}_{0,\nu}} - \varphi_{\tilde{w}_{1,\nu}}$ .

- Ein Teil der bewegungsinduzierten Störungen wird am Grenzschichtrand reflektiert. Aus der Lösung der konvektiven Wellengleichung (6.2) über einen Ansatz der Form

$$\phi_{n,\nu} = [G_{n,\nu} e^{-i\gamma_{n,\nu} z} + H_{n,\nu} e^{i\gamma_{n,\nu} z}] e^{i(\omega t + \alpha_\nu x)} \quad (6.50)$$

lässt sich für eine  $n$ -te Fluidschicht der komplexe Reflexionskoeffizient  $\Gamma_{n,\nu}$  bestimmen:

$$\Gamma_{n,\nu} = \frac{G_{n,\nu}}{H_{n,\nu}} = \frac{R_{n,\nu} \sigma_{n,\nu} + i}{R_{n,\nu} \sigma_{n,\nu} - i}. \quad (6.51)$$

Die Auswertung erfolgt bei  $z_n = 0$ , weshalb aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung weiterhin die Notation  $\Gamma_{n,\nu}|_{z_n=0} = \Gamma_{n,\nu}$  verwendet wird. Für  $N = 1$  beschreiben  $|\Gamma_{0,\nu}|$  und  $\varphi_{\Gamma_{0,\nu}}$  das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung der in positive und negative  $z$ -Richtung wandernden Stördruckkomponenten auf der welligen Wand ( $z = 0$ ). Im Folgenden werden diese als (von der Wand) emittierte und (vom Grenzschichtrand) reflektierte Wellenkomponenten referenziert.

Hinsichtlich der Abstrahlcharakteristik der Stördrücke in grenzschichtbehafteten Strömungen lassen sich drei phänomenologisch unterschiedliche Mechanismen isolieren, die in Abbildung 6.11 für den betrachteten  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum durch schwarz-weiß gestrichelte Linien voneinander abgegrenzt sind: (1) die Störungsausbreitung in einer rein subsonischen Strömung ( $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ ,  $\underline{M}_{\infty,\nu} < 1$ ), (2) jene beim Übergang von einem subsonischen Geschwindigkeitsbereich in eine supersonische Außenströmung ( $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ ,  $\underline{M}_{\infty,\nu} > 1$ ; in



diesem Zusammenhang als transsonische Strömung bezeichnet) und schließlich (3) die Störungsausbreitung in einer rein supersonischen Strömung ( $\underline{M}_{0,\nu} > 1$ ,  $\underline{M}_{\infty,\nu} > 1$ ). In den folgenden Betrachtungen wird dabei stets von einer konstanten Dichte- und Temperaturverteilung ausgegangen, d.h.  $\rho_0 = \rho_\infty$  und  $a_0 = a_\infty$ .

*Bemerkung 6.3:* Im Folgenden werden die Grenzschichtmechanismen detailliert für die verschiedenen Geschwindigkeitsbereiche diskutiert. Für eine zusammenfassende Gegenüberstellung der Ergebnisse sei, repräsentativ für  $k = 0$ , auf die Abbildungen C.1, C.2 und C.3 verwiesen.

### Subsonische Stördruckfelder $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ , $\underline{M}_{\infty,\nu} < 1$

In einer rein subsonischen Strömung ( $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ ,  $\underline{M}_{\infty,\nu} < 1$ ) lässt sich das Stördruckfeld mit  $\gamma_{n,\nu} = i\Im(\gamma_{n,\nu}) < 0$  als evaneszente Welle in Wandnormalenrichtung beschreiben. Da zudem für den gesamten  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum  $M_\infty > M_0$  gilt, ist die Dämpfung der bewegungsinduzierten Druckstörung in der Grenzschicht stets größer als in der Außenströmung, d.h.  $|\gamma_{0,\nu}| > |\gamma_{\infty,\nu}|$ . Aus Gleichung (6.46) und (6.22) folgt daher:

$$\begin{aligned}\Re(\sigma_{0,\nu}) &= 0, & \Im(\sigma_{0,\nu}) &< 0, \\ \Re(\sin(\kappa_{0,\nu})) &= 0, & \Im(\sin(\kappa_{0,\nu})) &< 0, \\ \Re(\cos(\kappa_{0,\nu})) &> 1, & \Im(\cos(\kappa_{0,\nu})) &= 0.\end{aligned}$$

In Gleichung (6.45) unterscheiden sich die Bruchterme des Stördruckverhältnisses  $R_{0,\nu}$  lediglich durch den Einfluss des Parameters  $\sigma_{0,\nu}$ . Da dieser invers in den Zähler eingeht, lässt sich wegen  $\Im(\sigma_{0,\nu}) < 0$  und  $\Im(\sin(\kappa_{0,\nu})) < 0$  nachweisen, dass die Grenzschicht in einem subsonischen Strömungsfeld stets die Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  reduziert, d.h.  $|R_{0,\nu}| < 1$  (vgl. Abbildung 6.11(a)). Die Verteilung des Einflussparameters  $|R_{0,\nu}|$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum ist durch zwei wesentliche Mechanismen geprägt: Zum einen korreliert eine Zunahme der reduzierten Frequenz  $k$ , und damit eine Erhöhung der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $V_\nu$ , im Fall der stromab wandernden Welle ( $V_{\nu=-1} \geq 0$ ) mit einer Reduktion der Relativgeschwindigkeit, d.h.  $U_{0,\nu=-1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow V_{\nu=-1} \rightarrow U_0$ . Dies führt zu einer Abnahme des Stördruckverhältnisses  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 0$ . Bei einem selbstähnlichen „Grenzschichtprofil“, also  $M_\infty/M_0 = \text{konstant}$ , ist dieser Effekt unabhängig von der Machzahl  $M_\infty$ .

Zum anderen erweist sich das Verhältnis der Wellenzahlkomponenten  $\gamma_{0,\nu}/\gamma_{\infty,\nu}$  als hauptverantwortlich für die Abnahme von  $|R_{0,\nu}|$  nahe der Stördrucksingularität ( $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1$ ). Physikalisch lässt sich dieser Effekt so interpretieren, dass der Einbruch der Dämpfung in der Außenströmung ( $\Im(\gamma_{\infty,\nu}) \rightarrow 0$ ) zu einer Dominanz der Dämpfung in der Grenzschicht führt ( $\Im(\gamma_{0,\nu})/\Im(\gamma_{\infty,\nu}) \gg 1$ ). Die damit einhergehende Reduktion der Stördruckamplituden gegenüber einer grenzschichtfreien Lösung kommt schließlich durch  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 0$  zum Ausdruck. Der Zusammenhang  $R_{0,\nu} = \Re(R_{0,\nu})$  korreliert mit  $\varphi_{R0,\nu} = 0$  und zeigt, dass die Phasenlage des Stördrucks auf der Wand unabhängig von der Grenzschicht  $\Delta\varphi_{0,\nu} = \pi$  beträgt (vgl. Abbildung 6.11(b)). Folglich ist der rein subsonische Bereich im Kontext des Energietransfers zwischen Strömung und Struktur von untergeordnetem Interesse.

### Transsonische Stördruckfelder $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ , $\underline{M}_{\infty,\nu} > 1$

Weist der Grenzschichtbereich einen subsonischen Charakter auf ( $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ ), während die relative Außenströmung bereits supersonisch ist ( $\underline{M}_{\infty,\nu} > 1$ ), so beschreibt das Stördruck-



feld eine evaneszente Welle in der Grenzschicht ( $\gamma_{0,\nu} = i\Im(\gamma_{0,\nu})$ ) mit einer angrenzenden ungedämpften Wellenausbreitung ( $\gamma_{\infty,\nu} = \Re(\gamma_{\infty,\nu})$ ) entlang der Mach'schen-Linien im Bereich der Außenströmung. Somit folgt aus Gleichung (6.46) und (6.22):

$$\begin{aligned}\Re(\sigma_{0,\nu}) &> 0, & \Im(\sigma_{0,\nu}) &= 0, \\ \Re(\sin(\kappa_{0,\nu})) &= 0, & \Im(\sin(\kappa_{0,\nu})) &< 0, \\ \Re(\cos(\kappa_{0,\nu})) &> 1, & \Im(\cos(\kappa_{0,\nu})) &= 0.\end{aligned}$$

Das Stördruckverhältnis  $R_{0,\nu}$  nimmt unter diesen Bedingungen stets komplexe Werte an, d.h. die Grenzschicht beeinflusst die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{0,\nu}$ . Wieder lässt sich die Lösung des Stördruckverhältnisses  $R_{0,\nu}$  für  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1$  auf anschauliche Weise über die Wellenzahlkomponenten  $\gamma_{\infty,\nu}$  und  $\gamma_{0,\nu}$  interpretieren. Eine durch die subsonische Grenzschicht transmittierte Störung breitet sich in der schallnahen Außenströmung ( $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1$ ) ungedämpft entlang der nahezu senkrecht zur Anströmung stehenden Mach'schen-Linien aus ( $\Re(\gamma_{\infty,\nu}) \rightarrow 0$ ). Dies führt gemäß der Prandtl-Glauert-Ackeret'schen Regel zu hohen Stördruckamplituden  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  [121]; ein Effekt, dem die Dämpfung der subsonischen Grenzschicht signifikant entgegengewirkt. Die damit einhergehende nominelle Diskrepanz zwischen den Wellenzahlkomponenten ( $|\gamma_{\infty,\nu}| \ll |\gamma_{0,\nu}|$ ) kommt schließlich durch  $\Re(\sigma_{0,\nu}) \rightarrow 0$  zum Ausdruck und führt nach Gleichung (6.45) auf  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 0$ .

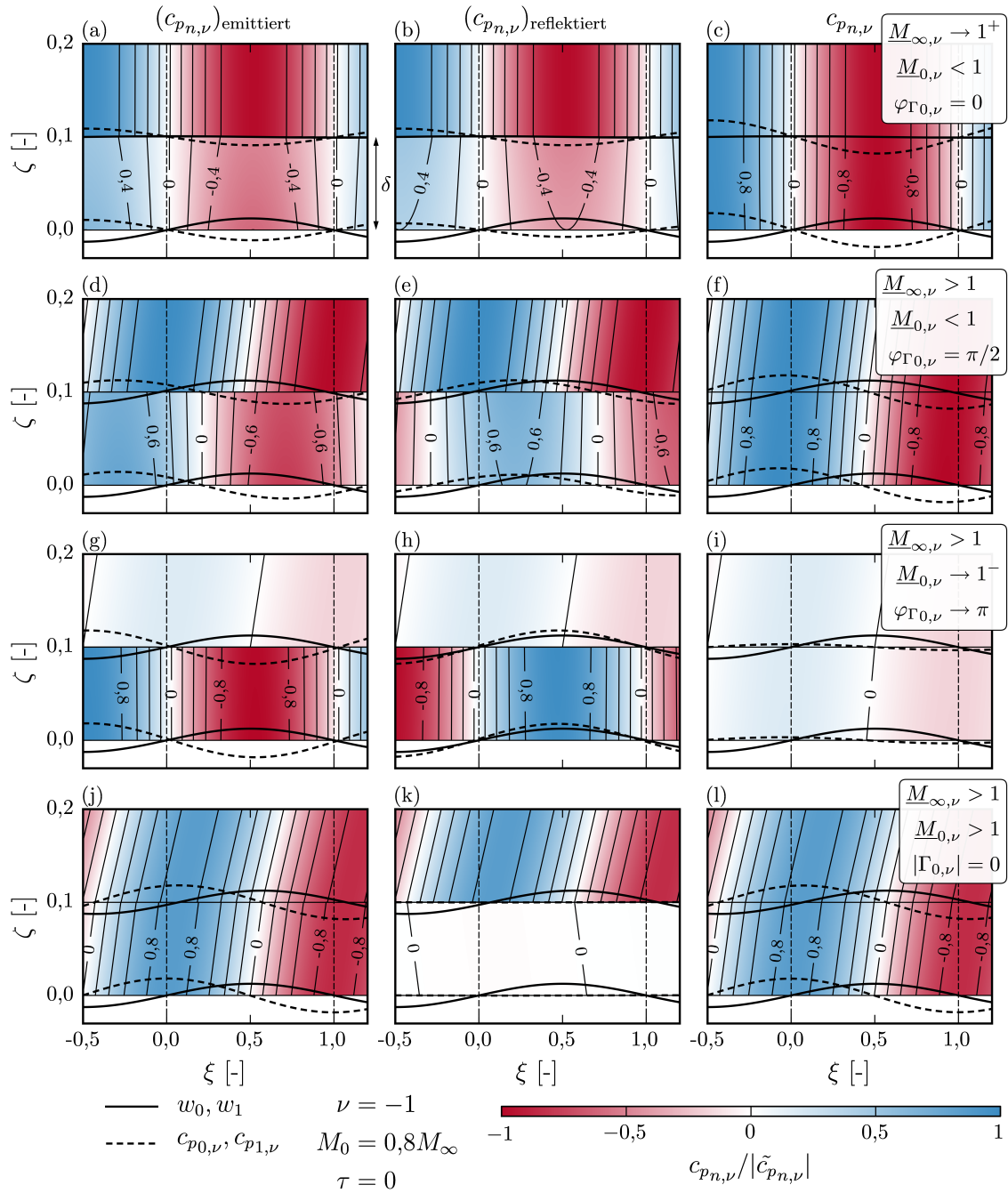
Bei einer weiteren Erhöhung der Machzahl  $M_\infty$  nimmt die Wellenzahlkomponente  $\Re(\gamma_{\infty,\nu})$  in der Außenströmung zu, während gleichzeitig die Dämpfung in der Grenzschicht  $\Im(\gamma_{0,\nu})$  weiter abnimmt. Hierbei kann ein Zustand eintreten, bei dem die Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  jener der grenzschichtfreien Strömung entspricht, d.h.  $|R_{0,\nu}| = 1$ . Aus Gleichung (6.45) lässt sich ableiten, dass hierfür  $|\sigma_{0,\nu}| = 1$  sein muss und somit ein Zustand beschrieben wird, bei dem das Verhältnis der Wellenzahlkomponenten gerade dem Verhältnis der dynamischen Relativdrücke  $\underline{q}_{n,\nu}$  entspricht:

$$|R_{0,\nu}| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\gamma_{0,\nu}|}{|\gamma_{\infty,\nu}|} = \frac{\underline{q}_{0,\nu}}{\underline{q}_{\infty,\nu}}. \quad (6.52)$$

Hat die Relativgeschwindigkeit in der Grenzschicht schließlich die Schallgeschwindigkeit erreicht ( $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1$ ), so kann sich eine Störung nahezu ungedämpft in der Grenzschicht ausbreiten ( $\Im(\gamma_{0,\nu}) \rightarrow 0$ ). Auffällig hierbei ist, dass es gegenüber der grenzschichtfreien Lösung zu einer Erhöhung der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  kommt. Wieder lässt sich aus Gleichung (6.45) ein Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der dynamischen Drücke  $\underline{q}_{0,\nu}/\underline{q}_{\infty,\nu}$  und dem Verhältnis der Wellenzahlkomponenten ableiten:

$$|R_{0,\nu}| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\gamma_{0,\nu}|}{|\gamma_{\infty,\nu}|} < \frac{\underline{q}_{0,\nu}}{\underline{q}_{\infty,\nu}}. \quad (6.53)$$

Um diese Zusammenhänge phänomenologisch besser zu verstehen und in den Kontext der Grenzschichtdynamik einordnen zu können, seien die resultierenden Stördruckfelder etwas genauer betrachtet. Wie einführend erwähnt, ist sowohl  $\gamma_{n,\nu}$  als auch  $\underline{q}_{n,\nu}$  unabhängig von der Grenzschichtdicke  $\delta_0$ . Dies deutet darauf hin, dass das Brechungsverhalten der bewegungsinduzierten Störungen am Grenzschichtrand eine wesentliche Rolle bei der Interpretation der Ergebnisse spielt. Abbildung 6.12 zeigt zu diesem Zweck eine entsprechend dem Ansatz (6.50) gewählte Aufteilung des Stördruckfeldes  $c_{p_{n,\nu}}(\xi, \zeta; t = 0)$  (rechte



**Abbildung 6.12:** Aufteilung des Stördruckfeldes  $c_{p0,\nu}$  (rechts) in die von der Wand emittierte (links) und am Grenzschichtrand reflektierte Komponente (mitig), normiert auf die Stördruckamplitude bei der jeweiligen Machzahl  $M_\infty$ , sowie überhöhte Darstellung der Deformation  $w_n$  und des Stördrucks  $c_{p_{n,\nu}}$  bei  $z = 0$  und  $z = \delta$ .

Spalte) in einen emittierten Anteil (linke Spalte) und einen reflektierten Anteil (mittlere Spalte). Hierbei lassen sich folgende Mechanismen identifizieren:

- Beim Überschreiten der lokalen Schallgeschwindigkeit  $a_\infty$  der äußeren Anströmung weist die Stördruckverteilung  $c_{p0,\nu}$  auf der Wand aufgrund des weiterhin subsonischen Charakters der Grenzschicht zunächst eine Phasenverschiebung von annähernd  $\Delta\varphi_{0,\nu} \approx \pi$  auf und setzt sich als evaneszente Welle bis zum Grenzschichtrand fort, wo sie für  $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1^+$  nahezu ohne Phasenverschiebung reflektiert wird. Hierbei kommt es zu einer Phasenverschiebung des Grenzschichtrandes um  $\varphi_{\chi0,\nu} = \pi/2$ , da aus „Sicht“ der supersonischen Außenströmung das lokale Druckmaximum  $c_{p1,\nu}$  mit dem Wendepunkt der welligen Stromlinie  $w_{1,\nu}$  zusammenfallen muss. Zugleich fordert die Druckkontinuität am Grenzschichtrand (6.5), dass die Schwingungsamplitude des Grenzschichtrandes gegen Null streben muss ( $|\tilde{w}_{1,\nu}| \rightarrow 0$ ). Die äußere Fluidschicht überströmt somit eine nahezu ebene Fläche, wodurch der Überschallcharakter im Gegensatz zur grenzschichtfreien Lösung nicht auf der eigentlichen Wand  $\tilde{w}_{0,\nu}$  wirken kann (vgl. Abbildungen 6.12(a) bis (c)).
- Der Zustand (6.52) stellt sich ein, wenn die Phasenverschiebung zwischen der in positive und negative  $z$ -Richtung wandernden Welle auf der Wand  $\varphi_{\Gamma0,\nu} = \pi/2$  beträgt und somit die Interferenz der entgegenlaufenden Wellen zu der vorab identifizierten Übereinstimmung der Stördruckamplituden  $|R_{0,\nu}| = 1$  führt (vgl. Abbildungen 6.12(d) bis (f)).
- In einer schallnahen Grenzschichtströmung  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1^-$  kommt es zu einer annähernd totalen Reflexion  $|\Gamma_{0,\nu}| \rightarrow 1$  der von der Wand ausgehenden Störungen (vgl. Abbildungen 6.12(g) bis (i)). Die damit einhergehende Phasenverschiebung  $\varphi_{\Gamma0,\nu} \rightarrow \pi$  weist auf eine stehende Welle in der Grenzschicht hin. Dabei wirkt die zunehmend destruktive Interferenz dem nach der Prandtl-Glauert-Ackeret'schen Regel zu erwartenden Anstieg der Stördruckamplitude  $|\bar{c}_{p0,\nu}|$  entgegen. Da sich die restlichen Störungen nun jedoch nahezu ungedämpft in der Grenzschicht ausbreiten können, lässt sich der Grenzschichtrand wie eine parallelverschobene Wand beschreiben, d.h.  $|\chi_{0,\nu}| \rightarrow 1$  und  $\varphi_{\chi0,\nu} \rightarrow 0$ .

### Supersonische Stördruckfelder $\underline{M}_{0,\nu} > 1$ , $\underline{M}_{\infty,\nu} > 1$

Abschließend sei der Bereich hoher Machzahlen  $M_\infty$  betrachtet, der durch einen supersonischen Charakter beider Fluidschichten gekennzeichnet ist, also  $\underline{M}_{0,\nu} > 1$  und  $\underline{M}_{\infty,\nu} > 1$ . Die Wellenzahlkomponenten nehmen nun rein reelle Werte an, d.h.  $\Im(\gamma_{0,\nu}) = 0$  und  $\Im(\gamma_{\infty,\nu}) = 0$ , und beschreiben folglich die ungedämpfte Störungsausbreitung entlang der Mach'schen-Linien. Entsprechend führen Gleichung (6.46) und (6.22) auf:

$$\begin{aligned}\Re(\sigma_{0,\nu}) &= 0, & \Im(\sigma_{0,\nu}) &< 0, \\ \Re(\sin(\kappa_{0,\nu})) &< 0, & \Im(\sin(\kappa_{0,\nu})) &= 0, \\ \Re(\cos(\kappa_{0,\nu})) &< 1, & \Im(\cos(\kappa_{0,\nu})) &= 0.\end{aligned}$$

Das Stördruckverhältnis  $R_{0,\nu}$  nimmt nach Gleichung (6.45) wieder komplexe Werte an, d.h. die Grenzschicht beeinflusst die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{0,\nu}$ . Ferner lassen sich aus Gleichung (6.49) für  $\chi_{0,\nu}$  und Gleichung (6.51) für  $\Gamma_{0,\nu}$  die folgenden Grenzschichtmechanismen ableiten:

- Überschreitet die Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht die Schallgeschwindigkeit ( $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1^+$ ), so geht die Phasenlage der emittierten und reflektierten Stördrücke bezüglich der Stromlinien  $\tilde{w}_0$  und  $\tilde{w}_1$  in den Überschallcharakter über, d.h.  $\Delta\varphi_{0,\nu} = \pi/2$  für die emittierte und  $\Delta\varphi_{1,\nu} = -\pi/2$  für die reflektierte Wellenkomponente. Da die beiden Teillösungen weiterhin um  $\varphi_{\Gamma 0,\nu} \rightarrow \pi$  zueinander phasenverschoben sind, wirkt die weitgehend destruktive Interferenz der entgegenlaufenden Wellen wieder dem Anstieg der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  entgegen und führt dazu, dass die resultierenden Druckverteilungen für den Grenzfall  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1^+$  und  $\underline{M}_{0,\nu} \rightarrow 1^-$  übereinstimmen (Stetigkeit von  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum). Der Grenzschichtrand wirkt dabei aufgrund des Mach'schen Winkels von  $\theta_{0,\nu} \rightarrow 90^\circ$  wieder wie eine parallelverschobene Wand, d.h.  $|\chi_{0,\nu}| \rightarrow 1$  und  $\varphi_{\chi 0,\nu} \rightarrow 0$ .
- Die mit der Erhöhung der Machzahl  $M_\infty$  einhergehende Erhöhung der Wellenzahlkomponente  $\gamma_{0,\nu} = \Re(\gamma_{0,\nu})$  korreliert mit einer Erhöhung des Mach'schen Winkels  $\theta_{0,\nu}$ . Bei einem gewissen Einfallswinkel der Störung auf den Grenzschichtrand kann die Störung ungehindert aus der Grenzschicht austreten ( $|\Gamma_{0,\nu}| = 0$ ). Die Stördruckverteilung  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  entspricht dadurch exakt dem grenzschichtfreien Fall, d.h.  $|R_{0,\nu}| = 1$ . Dieser Zustand ist analog zu den vorangegangenen Untersuchungen in den Abbildungen 6.12(j) bis (l) dargestellt. Aus Gleichung (6.51) lässt sich für supersonische Strömungsfelder der Zusammenhang  $|\Gamma_{0,\nu}| = 0 \Leftrightarrow \Im(\sigma_{0,\nu}) = 0$  und daraus eine zu Gleichung (6.52) ähnliche Beziehung ableiten:

$$|\Gamma_{0,\nu}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\gamma_{0,\nu}|}{|\gamma_{\infty,\nu}|} = \frac{q_{0,\nu}}{q_{\infty,\nu}}. \quad (6.54)$$

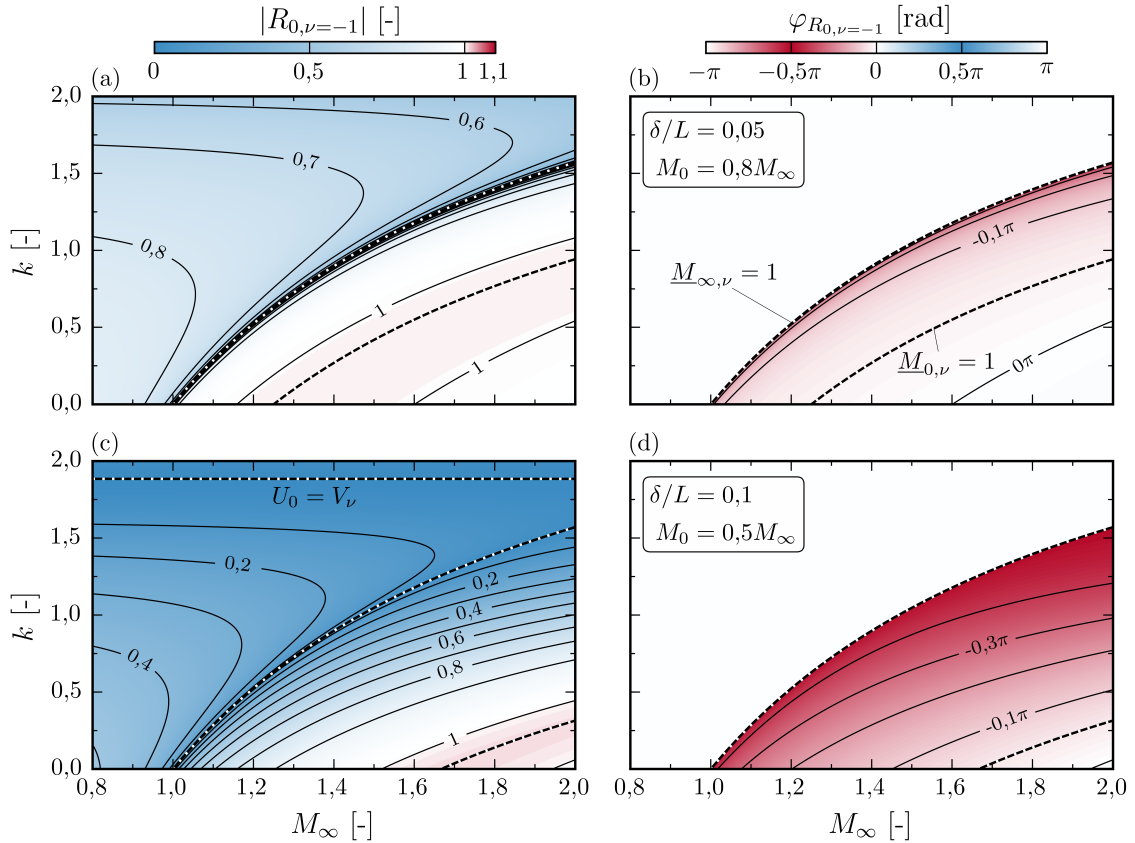
- Nach dem Überschreiten des Zustandes (6.54) nimmt der Reflexionsgrad  $|\Gamma_{0,\nu}|$  wieder leicht zu (vgl. Abbildung C.1(e)). Der unstetige Anstieg der Phasenverschiebung  $\varphi_{\Gamma 0,\nu}$  bei  $M_\infty(|\Gamma_{0,\nu}| = 0)$  beeinflusst die Gesamtstördruckverteilung  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  nur unwesentlich und nimmt daher im Kontext von Panelflatter-Problemstellungen eine untergeordnete Rolle ein.

### 6.2.6 Einflussanalyse der freien Grenzschichtparameter

In den folgenden Untersuchungen wird der Einfluss der Grenzschichtdicke  $\delta_0$  und der Geschwindigkeitsverteilung  $M_0/M_\infty$  auf das Stördruckverhältnis  $R_{0,\nu}$  für  $N = 1$  analysiert. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse ist in diesem Zusammenhang wieder in den Abbildungen C.2 und C.3 gegeben. Anschließend wird die Anzahl der Fluidschichten  $N$  erhöht, um den Einfluss realistischerer Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht zu bewerten.

#### Einfluss der Grenzschichtdicke $\delta_0$ auf $R_{0,\nu}$

Abbildungen 6.13(a) und (b) zeigen das Stördruckverhältnis  $R_{0,\nu}$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum für eine Grenzschichtdicke von  $\delta = \delta_0 = 0,05L$ . Dies entspricht einer Halbierung der im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Grenzschichtdicke (vgl. Abbildungen 6.11(a) und



**Abbildung 6.13:** Komponenten der komplexen Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  bei reduzierter Grenzschichtdicke  $\delta/L = 0,05$  (oben) und Grenzschichtgeschwindigkeit  $M_0/M_\infty = 0,5$  (unten).

(b)). Eine phänomenologische Interpretation dieser Ergebnisse gelingt über den Reflexionskoeffizienten  $\Gamma_{0,\nu}$ . Gleichung (6.51) lässt sich diesbezüglich umformulieren zu:

$$R_{0,\nu} = \frac{i}{\sigma_{0,\nu}} \left( \frac{\Gamma_{0,\nu} + 1}{\Gamma_{0,\nu} - 1} \right). \quad (6.55)$$

Weist die Grenzschicht einen Unterschallcharakter auf ( $\underline{M}_{0,\nu} < 1$ ), so lässt sich das bewegungsinduzierte Stördruckfeld als evaneszente Welle charakterisieren. Die Stördrücke breiten sich in wandnormaler Richtung bis zum Grenzschichtrand aus und werden dort anteilig reflektiert. Währenddessen unterliegen sie einer kontinuierlichen Dämpfung. Die Interferenz dieser Wellenkomponenten führt zwar qualitativ auf die gleiche Lösung wie für  $\delta_0 = 0,1L$ , jedoch erfolgt die Dämpfung bei einer geringeren Grenzschichtdicke über kürzere Distanzen, wodurch sich die Stördruckamplituden auf der welligen Wand erhöhen. Für  $\delta_0 \rightarrow 0$  folgt hieraus  $|\Gamma_{0,\nu}| \rightarrow 1$  und somit nach Gleichung (6.55)  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 1$ , während das Argument  $\varphi_{\Gamma_{0,\nu}}$  konstant bleibt. Da  $\sigma_{0,\nu}$  nach Gleichung (6.46) unabhängig von der Grenzschichtdicke  $\delta_0$  ist, findet sich der Zustand  $|R_{0,\nu}| = 1$  an unveränderter Position im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum. Dabei gelten weiterhin die Beziehungen (6.52) und (6.53).

In einer Grenzschicht mit Überschallcharakter hat die Dicke  $\delta_0$  einen Einfluss auf die Phase  $\varphi_{\Gamma_{0,\nu}}$ , während das Amplitudenverhältnis  $|\Gamma_{0,\nu}|$  zwischen emittierter und reflektierter Wellenkomponente konstant bleibt. Dies resultiert aus der Tatsache, dass sich die Störungen

nun ungedämpft entlang der Mach'schen Linien ausbreiten. Die Amplitude der emittierten und reflektierten Wellenkomponente, und somit das Amplitudenverhältnis  $|\Gamma_{0,\nu}|$ , bleibt folglich konstant, jedoch nimmt mit abnehmender Grenzschichtdicke  $\delta_0$  die zurückgelegte Weglänge der Störungen und somit die relative Phasenverschiebung auf der Wand ab, d.h.

$$\varphi_{\Gamma_{0,\nu}} \rightarrow \begin{cases} -\pi, & \frac{|\gamma_{0,\nu}|}{|\gamma_{\infty,\nu}|} < \frac{q_{0,\nu}}{q_{\infty,\nu}} \\ 0, & \frac{|\gamma_{0,\nu}|}{|\gamma_{\infty,\nu}|} > \frac{q_{0,\nu}}{q_{\infty,\nu}} \end{cases} \Leftrightarrow \delta_0 \rightarrow 0. \quad (6.56)$$

Da  $\sigma_{0,\nu}$  ein von der Grenzschichtdicke  $\delta_0$  unabhängiger Parameter ist, lässt sich aus dieser Beziehung und Gleichung (6.55) ableiten, dass  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 1$  und  $\varphi_{R_{0,\nu}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \delta_0 \rightarrow 0$ .

Weil sich die qualitativen Mechanismen des Grenzschichteinflusses durch eine Variation von  $\delta_0$  nicht ändern, haben die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen dynamischen Eigenschaften des Grenzschichtrandes  $\tilde{w}_1$  weiterhin Gültigkeit. Mit abnehmender Grenzschichtdicke nähert sich die Stromlinie, die den Grenzschichtrand beschreibt, wie zu erwarten der grenzschichtfreien Lösung an, d.h.  $|\chi_{0,\nu}| \rightarrow 1$  und  $\varphi_{\chi_{0,\nu}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \delta_0 \rightarrow 0$ .

### **Einfluss des Geschwindigkeitsverhältnisses $M_0/M_\infty$ auf $R_{0,\nu}$**

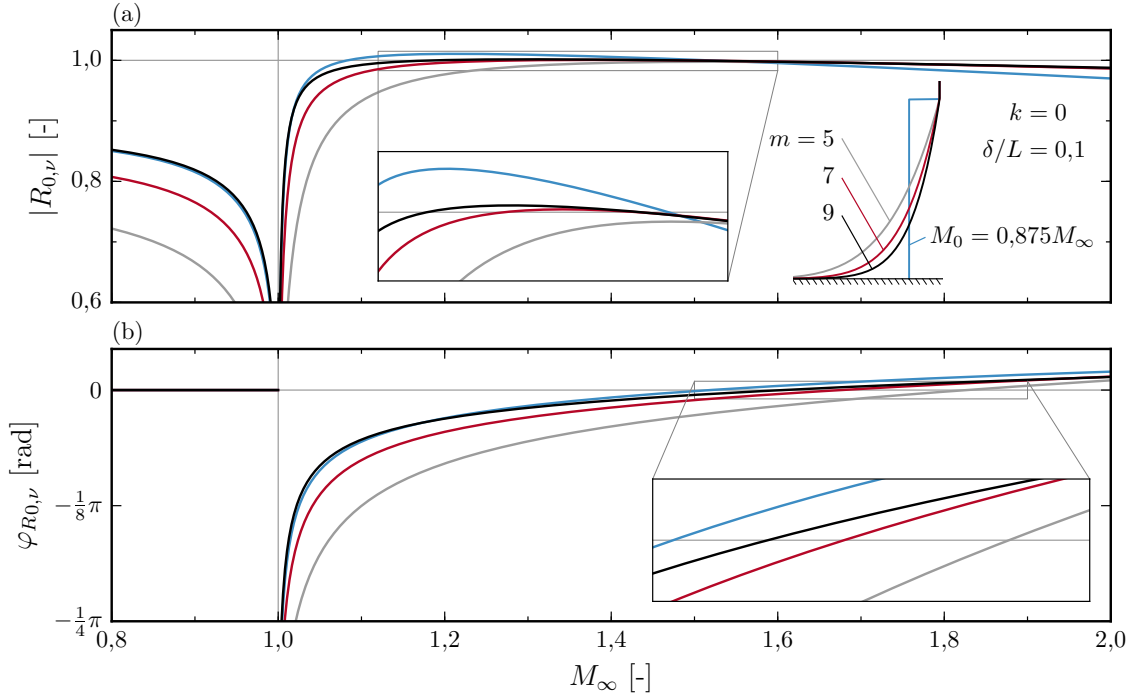
Eine Verringerung des Geschwindigkeitsverhältnisses  $M_0/M_\infty$  geht mit einer Reduktion der Relativgeschwindigkeit  $\underline{U}_{0,\nu}$  einher, wodurch die Schallgeschwindigkeit  $a_0$  in der Grenzschicht erst bei höheren Machzahlen  $M_\infty$  erreicht wird. Die daraus resultierende Beeinflussung des Stördruckverhältnisses  $R_{0,\nu}$  ist in den Abbildungen 6.13(c) und (d) sowie in Abbildung C.3(c) für  $k = 0$  dargestellt und lässt sich wie folgt zusammenfassen:

- In einer schallnahen Anströmung  $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1^-$  erhöht sich der dämpfende Einfluss der Grenzschicht, da  $\Im(\gamma_{0,\nu})$  mit der lokal abnehmenden Strömungsgeschwindigkeit  $U_0$  nominell zunimmt und somit wieder dem nach der Prandtl-Glauert-Ackeret'schen Regel zu erwartenden Anstieg der Stördruckamplituden für  $\underline{M}_\infty \rightarrow 1^-$  entgegenwirkt, d.h.  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow M_0/M_\infty \rightarrow 0$ .
- Dieser Mechanismus lässt sich ebenso auf  $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1^+$  übertragen. Wenngleich die äußere Anströmung bereits supersonisch ist, verstärkt sich mit einem abnehmenden Geschwindigkeitsverhältnis  $M_0/M_\infty$  der Unterschallcharakter der Stördruckverteilung auf der Wand, gekennzeichnet durch  $\varphi_{R_{0,\nu}} \rightarrow -\pi/2 \Leftrightarrow M_0/M_\infty \rightarrow 0$  und  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 0$ .
- Durch die Verringerung des dynamischen Druckverhältnisses  $q_{0,\nu}/q_{\infty,\nu}$  wird der Zustand  $|R_{0,\nu}| = 1$  nach Gleichung (6.52) erst bei höheren Machzahlen  $M_\infty$  erreicht.
- Da die Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  nach Gleichung (6.13) proportional zur reduzierten Frequenz  $k$  ist, verschiebt sich der Zustand  $V_\nu = U_0$  mit abnehmender Grenzschichtgeschwindigkeit  $U_0$  hin zu niedrigeren Frequenzen  $k$ :

$$U_0 = V_\nu \Leftrightarrow k = -\nu\pi \frac{U_0}{U_\infty}. \quad (6.57)$$

Hierbei kann die Relativströmung  $\underline{U}_{0,\nu} = 0$  nach Gleichung (6.14) als ruhendes Fluid über einer welligen Wand interpretiert werden, wodurch die Stördruckausbreitung unterbunden wird, d.h.  $|R_{0,\nu}| = 0$ .





**Abbildung 6.14:** Einfluss des Geschwindigkeitsprofils der Grenzschicht auf das Stördruckverhältnis  $R_{0,\nu}$ .

Es lässt sich zusammenfassen, dass eine Verringerung der Grenzschichtgeschwindigkeit  $U_0$  mit einem zunehmend subsonischen Charakter der Wandstördrücke  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  korreliert, wobei die im Vorfeld diskutierten Mechanismen der Stördruckausbreitung in der Grenzschicht und der Dynamik des Grenzschichtrandes qualitativ nicht beeinflusst werden.

#### **Einfluss variierender Geschwindigkeitsverteilungen auf $R_{0,\nu}$ für $N > 1$**

Abschließend sei der Einfluss räumlich variierender Geschwindigkeitsverteilungen auf das Stördruckverhältnis  $R_{0,\nu}$  analysiert. Abbildung 6.14 zeigt hierfür einen Vergleich von  $|R_{0,\nu}|$  und  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  bei einer reduzierten Frequenz von  $k = 0$  (siehe Diskussion der Modelleinschränkungen in Abschnitt 6.2.2) für verschiedene Grenzschichtprofile, die dem Potenzgesetz

$$U = U_N \left( \frac{z}{\delta} \right)^{1/m} \quad \text{mit } m = 5, 7, 9 \quad (6.58)$$

folgen. Die kontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilungen sind durch  $N = 10^3$  äquidistante Unterschichten ( $\delta_n = \text{konst.}$ ) approximiert, wobei die Geschwindigkeit  $U_n$  der  $n$ -ten Unterschicht nach Gleichung (6.58) an der Position  $z = \delta_n(n + 0,5)$  bestimmt wird. Die im Vorfeld diskutierten Mechanismen der Störungsausbreitung lassen sich nun auf jede der  $N$  Unterschichten übertragen. Zusätzlich seien die Ergebnisse jenen für eine einzelne Unterschicht ( $N = 1$ ) mit  $M_0/M_\infty = 0,875$  gegenübergestellt. Dies entspricht dem Mittelwert der Geschwindigkeitsverteilung nach Gleichung (6.58) für  $m = 7$ , wodurch sich der Einfluss der räumlichen Mittelung auf die Ergebnisse bewerten lässt.

Für  $M_\infty \rightarrow 1^-$  zeigt sich zunächst, dass die Stördruckamplitude abnimmt, wenn das Grenzschichtprofil weniger völlig ist, d.h. die Konstante  $m$  in Gleichung (6.58) kleiner

wird. Diese Beobachtung deckt sich mit den Erkenntnissen der vorangegangenen Untersuchungen, da kleinere Werte für  $m$  mit geringeren Geschwindigkeiten des Grundströmungszustandes  $U_n(z)$  und folglich mit höheren Dämpfungen der Stördrücke  $\Im(\gamma_n)$  korrelieren. Aufgrund des reinen Unterschallcharakters des Strömungsfeldes stimmen die Phasenverschiebungen der grenzschichtfreien und -behafteten Stördruckverteilungen überein, d.h.  $\varphi_{R0,\nu} = 0$ .

Für  $M_\infty \rightarrow 1^+$  ist sowohl eine Reduktion der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  als auch eine Phasenverschiebung in Richtung des Unterschallcharakters ( $\varphi_{R0,\nu} \rightarrow -\pi/2$ ) zu erkennen. Weniger völlige Grenzschichtprofile (kleine  $m$ ) haben hierbei einen stärker ausgeprägten Unterschallcharakter, da ein höherer Anteil der Grenzschicht subsonische Geschwindigkeiten aufweist, in denen sich die Stördrücke in Form evaneszenter Wellen ausbreiten ( $\Re(\gamma_{n,\nu}) = 0$ ). Mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  nimmt der Einfluss des Grenzschichtprofils deutlich ab.

Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit jenen für eine konstante Geschwindigkeit in der Grenzschicht ( $N = 1$ , vgl. Abbildung 6.14) deutet darauf hin, dass die räumliche Mittelung der Geschwindigkeitsverteilung eine gerechtfertigte Näherung darstellt, wenngleich eine Tendenz dieser vereinfachten Annahme zu völligeren Grenzschichtprofilen erkennbar ist. Die damit verbundene Unterschätzung der aerodynamischen Dämpfung zeigt, dass die Verwendung einer einzelnen Unterschicht ( $N = 1$ ) in Hinblick auf die aeroelastische Stabilitätsanalyse einen konservativen Ansatz beschreibt.

### 6.2.7 Generalisierte Luftkräfte in grenzschichtbehafteten Systemen

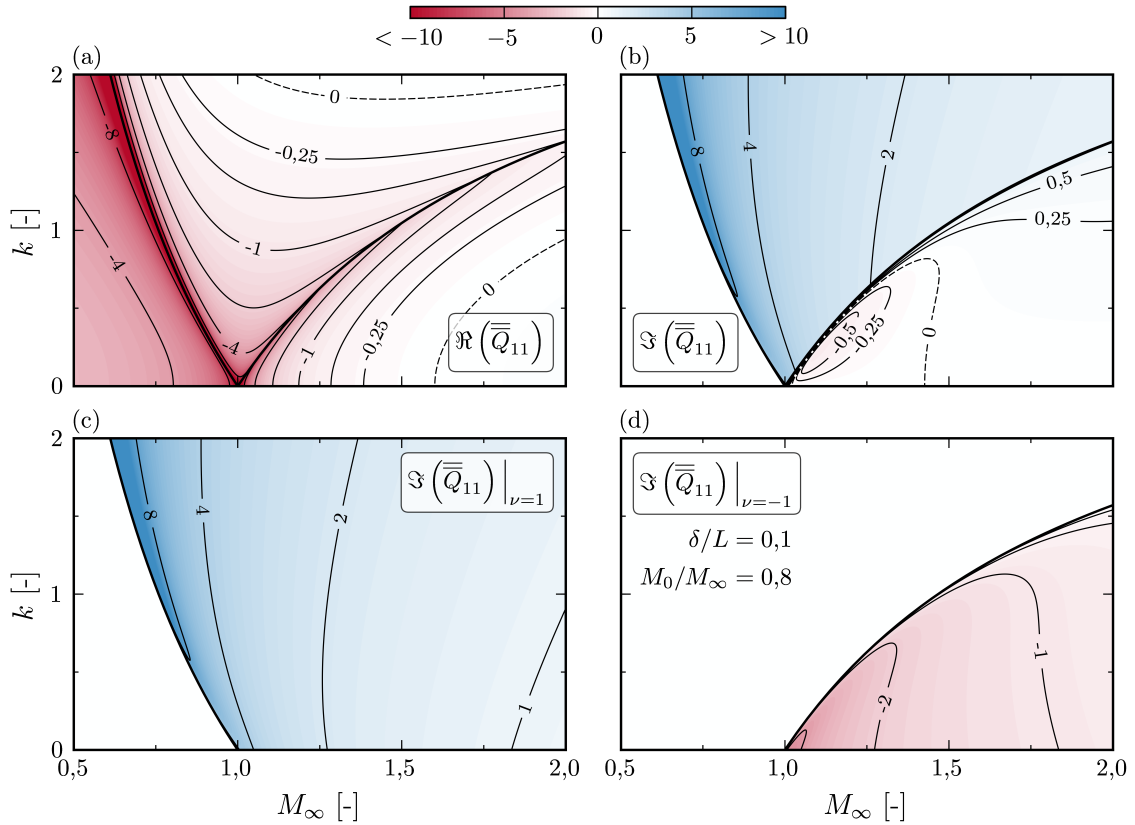
Zwar kommt der stromab wandernden Welle ( $\nu = -1$ ) im Kontext des Grenzschichteinflusses eine höhere Bedeutung zu (siehe Abschnitt 6.2.3), dennoch lassen sich die in diesem Kapitel identifizierten Mechanismen ebenso auf die stromauf wandernde Welle ( $\nu = 1$ ) übertragen. In Bezug auf die in Abschnitt 6.2.2 durchgeführte Analyse der generalisierten Luftkräfte  $\overline{\overline{Q}}_{11}$  in grenzschichtfreien Strömungen sei abschließend untersucht, welchen Einfluss die in Abschnitt 6.2.5 identifizierten Grenzschichtmechanismen auf die superpositionierte Lösung  $\overline{\overline{Q}}_{11}$  haben und wie sich diese Erkenntnisse auf höher-harmonische Anregungsformen übertragen lassen.

#### Generalisierte Luftkräfte für $\nu = \pm 1$

Abbildung 6.15 fasst die generalisierten Luftkräfte  $\overline{\overline{Q}}_{11}$  analog zu Abbildung 6.5 unter Berücksichtigung einer einzelnen Unterschicht ( $N = 1$ ) im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum zusammen. Hierbei zeigt sich, dass der Bereich, in dem der Strömung Energie entzogen werden kann ( $\Im(\overline{\overline{Q}}_{11}) < 0$ ), im Vergleich zur grenzschichtfreien Lösung erheblich reduziert wird (vgl. Abbildung 6.5(b) und Abbildung 6.15(b)). Hauptverantwortlich hierfür ist die hohe Beeinflussung der stromab wandernden Welle durch die Grenzschicht (vgl. Abbildungen 6.15(c) und (d)). Die damit einhergehende nominelle Abnahme von  $\Im(\overline{\overline{Q}}_{11})$  weist somit den dämpfenden Charakter der Grenzschicht im niedrigen supersonischen Machzahlbereich nach.

Aufgrund des evaneszenten Charakters subsonischer Stördruckfelder beeinflusst die Grenzschicht für  $M_\infty < 1$  primär den Realteil der generalisierten Luftkraft  $\Re(\overline{\overline{Q}}_{11}) < 0$  (vgl. Abbildungen 6.15(a) und (b)). Mithilfe der in den theoretischen Vorbetrachtungen identifizierten Stabilitätsmechanismen (Kapitel 2) lässt sich somit zeigen, dass dynamische

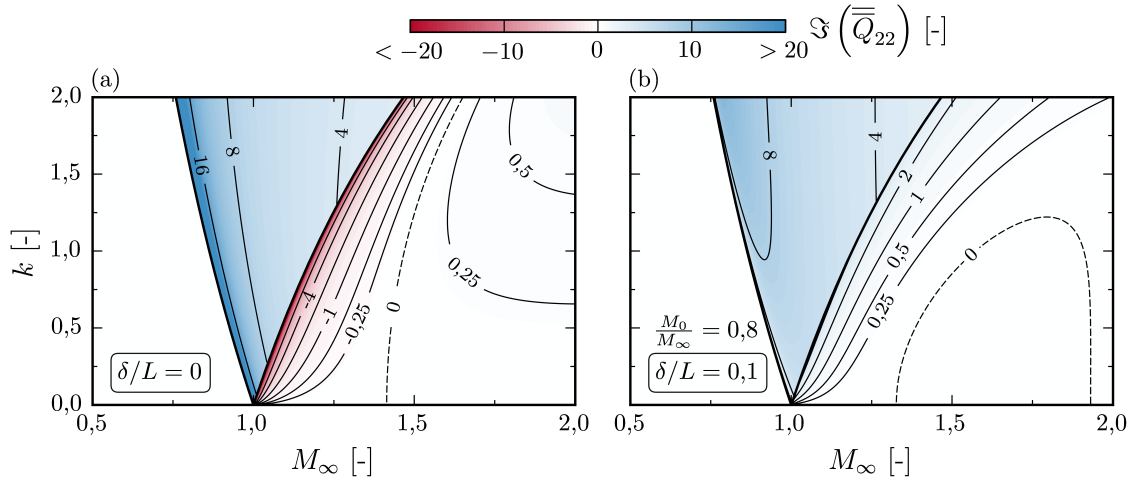




**Abbildung 6.15:** Komponenten der generalisierten Luftkraft  $\bar{\bar{Q}}_{11}$  in einer grenzschicht-behafteten Strömung.

Instabilitäten auch unter Berücksichtigung einer Grenzschicht ein typisches Überschallphänomen ( $M_\infty > 1$ ) darstellen. Die Ergebnisse der numerischen Studien in Kapitel 5 bestätigen diese Aussage, sofern das aeroelastische System als dynamisch linear, etwa im Bereich der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$ , angesehen werden kann ( $\hat{w}_0 \ll L$ ). Hinsichtlich der in Abschnitt 6.2.4 identifizierten Grenzschichtmechanismen lässt sich schlussfolgern, dass im Kontext aeroelastischer Stabilitätsprobleme dem subsonischen Charakter der Grenzschicht, der beim Übergang in den supersonischen Geschwindigkeitsbereich eine sprunghafte Transition der bewegungsinduzierten Stördruckfelder hin zum Überschallcharakter unterbindet, die größte Bedeutung zukommt. Im hohen Machzahlbereich unterscheidet sich  $\Im(\bar{\bar{Q}}_{11}) < 0$  hingegen nur unwesentlich von der in Abbildung 6.5 gezeigten grenzschichtfreien Lösung.

In Hinblick auf die in Abschnitt 6.2.2 vorgestellten Untersuchungen von Fung [10] bestätigt sich, dass die Grenzschicht dem destabilisierenden Charakter stromab wandernder Wellen für  $M_\infty \rightarrow 1$  signifikant entgegenwirkt. Allerdings lässt sich auf Basis der vorangegangenen Untersuchungen ebenfalls schlussfolgern, dass eine alleinige Betrachtung der Dynamik des Grenzschichtrandes  $\tilde{w}_{N,\nu}$  die resultierende Stördruckverteilung  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  auf der oszillierenden Wand nicht hinreichend zu erklären vermag. So lassen sich etwa die nach Gleichung (6.52) beschriebenen Zusammenhänge nur unter Berücksichtigung der Ausbreitungscharakteristik bewegungsinduzierter Stördrücke im Grenzschichtbereich ableiten.



**Abbildung 6.16:** Imaginärteil der generalisierten Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{22})$  in einer grenzschichtfreien (links) und grenzschichtbehafteten (rechts) Strömung.

### Generalisierte Luftkräfte für $\nu = \pm 2$

Die vorangegangenen Analysen beschränken sich auf  $\nu = \pm 1$ , da Vielfache der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  aus qualitativer Sicht zu identischen Ergebnissen führen und daher nicht zum Erkenntnisgewinn hinsichtlich des Grenzschichteinflusses beitragen. Dennoch seien die quantitativen Auswirkungen auf den Energietransfer zwischen Strömung und Struktur exemplarisch für  $\nu = \pm 2$ , d.h. für eine Verdopplung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$ , diskutiert. Hierfür zeigt Abbildung 6.16 die generalisierte Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{22})$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum am Beispiel einer grenzschichtfreien ( $\delta/L = 0$ ) und einer grenzschichtbehafteten ( $\delta/L = 0,1$ ) Strömung.

Für eine überströmte wellige Wand verdeutlicht Gleichung (6.38), dass eine Verdopplung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  bei einer konstanten Anregungsamplitude  $|\tilde{w}_{0,\nu}|$  zu einer signifikanten Erhöhung der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  führt. Ist eine Grenzschicht präsent, so lässt sich für  $N = 1$  der Zusammenhang ableiten, dass eine Verdopplung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  bei konstanter Grenzschichtdicke  $\delta_N$  einen vergleichbaren Einfluss auf Betrag und Phase des komplexen Stördruckkoeffizienten  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  hat wie eine Verdopplung der Grenzschichtdicke  $\delta_N$  bei konstanter Wellenzahl  $\alpha_\nu$ . Diesbezüglich gelten alle Erkenntnisse der vorangegangenen Untersuchungen auch für  $\nu = \pm 2$ .

Bei einer konstanten Frequenz  $k$  geht eine Verdopplung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  nach Gleichung (6.13) zudem mit einer Halbierung der Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  einher. Entsprechend erhöht (bzw. verringert) sich die Relativgeschwindigkeit  $\underline{U}_{0,\nu}$  der stromab (bzw. stromauf) wandernden Welle (siehe Gleichung (6.14)) und der Zustand  $\underline{M}_{\infty,\nu} = 1$  verschiebt sich nach Gleichung (6.43) in Richtung  $M_\infty \rightarrow 1$  (vgl. Abbildung 6.16).

Die Darstellung der generalisierten Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{22})$  im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum verdeutlicht darüber hinaus, dass aufgrund der effektiven Verdopplung der Grenzschichtdicke (bezogen auf eine Halbwellenlänge) der Energietransfer von der Strömung in die anregende Struktur signifikant reduziert und in den Bereich höherer Machzahlen  $M_\infty$  verschoben wird (vgl. Abbildung 6.16(b)). Letztgenannter Effekt ist qualitativ auf die Überlagerung der Stördruckverteilung  $\Re(\tilde{c}_{p0,\nu})$  beider Teillösungen zurückzuführen, wie Abbildungen 6.10(b) und (d) illustrieren.

## 6.3 Bewertung der analytischen Ergebnisse mittels CFD

Da die in Abschnitt 6.2 identifizierten Grenzschichtmechanismen auf sehr vereinfachten Modellannahmen basieren, ist ihre qualitative und quantitative Richtigkeit durch einen Vergleich mit höherwertigeren Modellen zu bewerten. So müssen für sehr kleine Schwingungsamplituden die Lösungen der linearisierten Potentialgleichung mit jenen der Euler-Gleichungen übereinstimmen. Zeigen die Lösungen der RANS-Gleichungen zudem vergleichbare Ergebnisse wie das in Abschnitt 6.2 vorgestellte potentialtheoretische Ersatzmodell, kann dies als Nachweis gewertet werden, dass der Energietransfer zwischen Strömung und Struktur primär durch die lokale Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht beeinflusst wird.

### 6.3.1 Anpassung der Rechennetze und numerischen Randbedingungen

Die Herausforderung der anschließenden Untersuchungen besteht darin, das analytische Modell der unendlich langen welligen Wand über ein diskretisiertes Strömungsfeld mit finiten Dimensionen zu approximieren. Hierfür wird das in Abschnitt 4.4.1 vorgestellte Rechennetz dahingehend modifiziert, dass der Bereich über der eigentlichen Schale ( $0 \leq x \leq L$ ) bei gleichbleibender Netzfeinheit sechsmal in positiver und achtmal in negativer  $x$ -Richtung ausgetragen wird. Die Distanz, über die sich die gewünschte Grenzschichtdicke einstellt, begrenzt hierbei die maximale Anzahl der Oberflächenwellen. Über die in Abschnitt 4.2 beschriebene Netzdeformation wird anschließend das Rechennetz der vorgegebenen Wandverformung

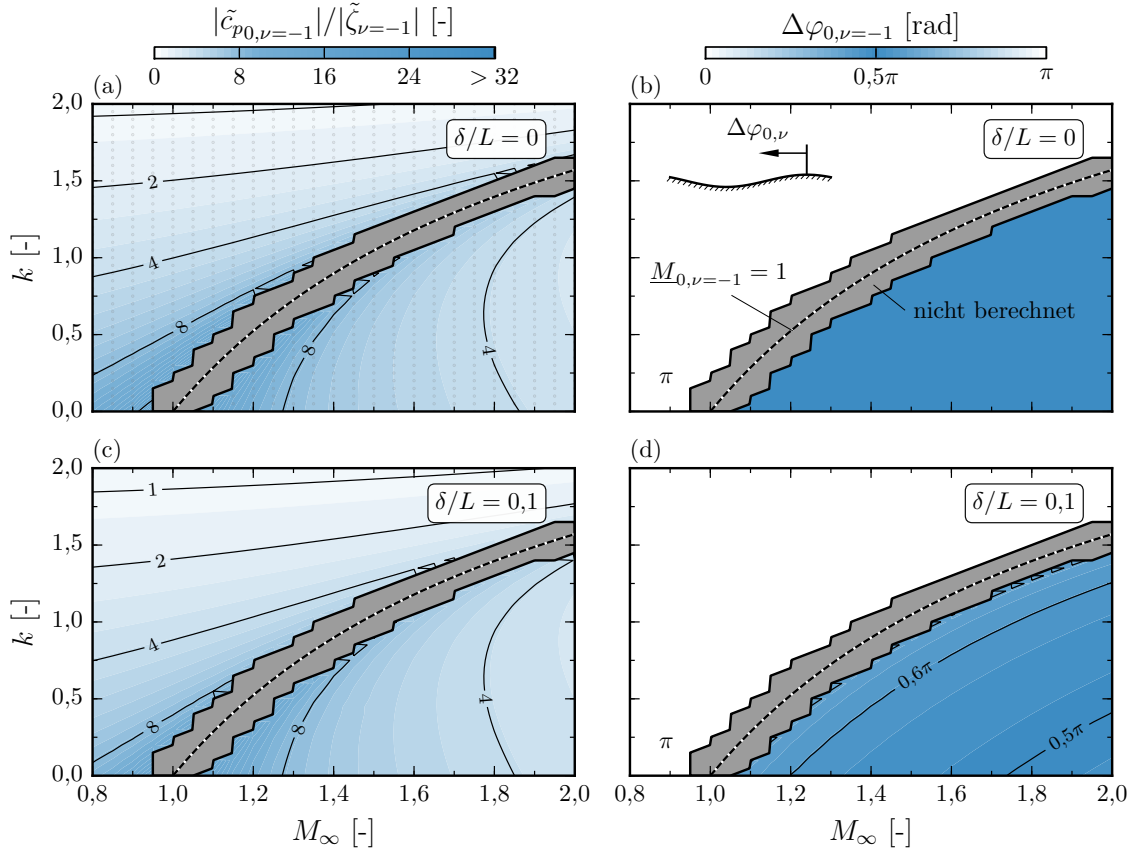
$$w_0 = |\tilde{w}_{0,\nu}| \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{|\tilde{w}_{0,\nu}|}{L} = 2,86 \cdot 10^{-5} \quad (6.59)$$

nachgeführt. Hierbei wird der stationäre Charakter der Strömung im körperfesten Bezugssystem ausgenutzt und die relative Machzahl  $\underline{M}_{\infty,\nu}$  nach Gleichung (6.14) bei einer konstanten Totaltemperatur von  $T_{\text{tot}} = 310 \text{ K}$  und Reynoldszahl von  $\text{Re} = 5 \cdot 10^6$ , bezogen auf die Referenzlänge  $l_{\text{ref}} = 1 \text{ m}$ , als Randbedingung vorgegeben.

*Bemerkung 6.4:* Die Wahl dieser Randbedingungen ermöglicht eine experimentelle Validierung der Ergebnisse am Transsonischen Windkanal in Göttingen (TWG) [124].

Da die Netztopologie und dessen räumliche Auflösung den in Abschnitt 4.4.1 untersuchten Rechennetzen entspricht und die Netzverformungen sehr gering sind, wird auf eine separate Netzkonvergenzstudie verzichtet. Alle weiteren Studien, die sich auf finite Schalen beziehen, basieren wieder auf den in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Rechennetzen. Die zeitliche Diskretisierung wird über die Aufteilung einer Schwingungsperiode in 200 physikalische Zeitschritte vorgegeben. Anschließend werden die Zeitbereichslösungen, sofern nicht anders erwähnt, über eine FFT in den Frequenzbereich überführt.

Für die Schließung der RANS-Gleichungen kommt im Folgenden allein das SA-Turbulenzmodell zum Einsatz, da in Kapitel 5 keine relevanten Abweichungen zum Menter-SST-Turbulenzmodell festgestellt werden konnten und die bewegungsinduzierten Stördrücke in den folgenden Studien nominell schwächer ausgeprägt sind als in den aeroelastischen Stabilitätsuntersuchungen.



**Abbildung 6.17:** Betrag und Phasenverschiebung der stromab wandernden Wellenkomponenten des Stördrucks  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  in einer grenzschichtfreien (oben) und grenzschichtbehafteten (unten) Strömung.

*Bemerkung 6.5:* Zwar basiert die Lösung der Euler- und RANS-Gleichungen nicht auf diskreten Fluidschichten  $n$ , dennoch wird zur Kennzeichnung des Stördruckkoeffizienten der Index  $(\cdot)_0$  weiter fortgeführt, wenn sich die Ergebnisse auf eine Auswertung bei  $z = 0$  beziehen, d.h.  $c_{p0} \equiv c_p|_{z=0}$  (vgl. Bemerkung 6.1). Dies fördert die Lesbarkeit bei der Gegenüberstellung numerischer und analytischer Ergebnisse.

### 6.3.2 Vergleich der analytischen und numerischen Ergebnisse

Zur numerischen Bestimmung der Stördrücke  $\tilde{c}_{p0,\nu=-1}$  wird der  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum in ein äquidistantes Raster aus 31 Machzahlen und 41 reduzierten Frequenzen unterteilt. Abbildungen 6.17(a) und (b) stellen die Ergebnisse der reibungsfreien Simulationen in Form der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$  und der Phasenverschiebung  $\Delta\varphi_{0,\nu}$  für die stromab wandernde Welle ( $\nu = -1$ ) dar. Diesen sind in Abbildungen 6.17(c) und (d) die Ergebnisse für eine Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 0,1$  gegenübergestellt. Ein Vergleich mit den analytischen Lösungen in Abbildungen 6.7(a) und (b) sowie 6.9(a) und (b) deutet hierbei bereits eine gute Übereinstimmung an. So zeigen sich vergleichbare Isobarenverläufe sowie der nach der Prandtl-Glauert-Ackeret'schen Regel zu erwartende Druckanstieg für  $M_{\infty,\nu} \rightarrow 1$ .

Für eine direkte Gegenüberstellung der numerischen und analytischen Lösungen wird in

Abbildung 6.18 ein Schnitt durch den  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum bei einer konstanten reduzierten Frequenz von  $k = 0$  betrachtet. Hierbei seien die Abweichungen der Amplitude über den Zusammenhang

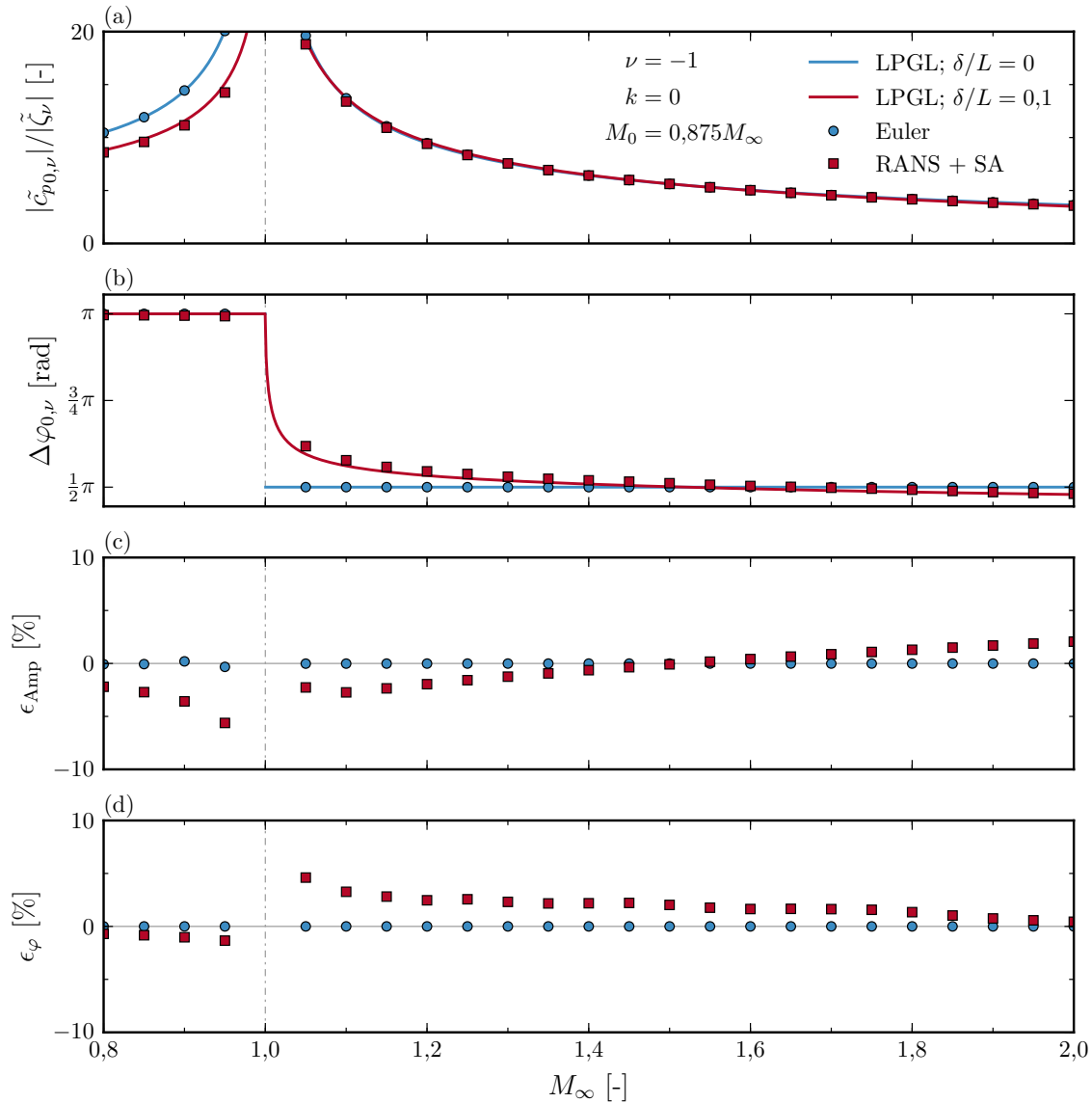
$$\epsilon_{\text{Amp}} = \frac{|\tilde{c}_{p0,\nu}|_{\text{Euler/RANS}} - |\tilde{c}_{p0,\nu}|_{\text{LPGL}}}{|\tilde{c}_{p0,\nu}|_{\text{LPGL}}} \cdot 100 \% \quad (6.60)$$

bestimmt, während sich die Abweichungen in der Phasenverschiebung auf den Wert  $0.5\pi$  beziehen:

$$\epsilon_\varphi = \frac{(\Delta\varphi_{0,\nu})_{\text{Euler/RANS}} - (\Delta\varphi_{0,\nu})_{\text{LPGL}}}{0,5\pi} \cdot 100 \% . \quad (6.61)$$

Es zeigt sich, dass die numerischen Lösungen der Euler-Gleichungen mit absoluten Abweichungen von  $|\epsilon_\varphi| < |\epsilon_{\text{Amp}}| \leq 0,5 \%$  sehr gut mit jenen der linearisierten Potentialgleichung übereinstimmen, obwohl die Anzahl der modellierten Oberflächenwellen endlich ist. Daraus lässt sich ableiten, dass bei den folgenden Untersuchungen der Einfluss der „Einspannung“, also des Übergangs von der ebenen zur welligen Wand, auf die reibungsfreien Ergebnisse vernachlässigt werden kann. Diese Erkenntnis ist insbesondere für die nachfolgende Interpretation der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  wichtig, da sich Abweichungen somit primär auf die Modellierung der Grenzschicht zurückführen lassen. Die Lösungen der RANS-Gleichungen zeigen in diesem Zusammenhang eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Referenzergebnissen (vgl. Abbildung 6.18). Wie zu erwarten, nehmen jedoch  $\epsilon_{\text{Amp}}$  und  $\epsilon_\varphi$  für  $M_\infty \rightarrow 1$  nominell deutlich zu, da durch den zunehmenden Einfluss weiterer Strömungseigenschaften (z.B. Viskosität; siehe nachfolgende Fehlerdiskussion) die Gültigkeit der linearisierten Potentialgleichung eingeschränkt wird. Die Abweichungen liegen für  $M_\infty > 1$  im Bereich  $|\epsilon_{\text{Amp}}| < 6 \%$  und  $|\epsilon_\varphi| < 5 \%$  (vgl. Abbildungen 6.18(c) und (d)). In subsonischen Strömungsfeldern ist  $|\epsilon_{\text{Amp}}|$  deutlich höher, jedoch geben die Lösungen den elliptischen Typus der Differentialgleichung (6.2) zufriedenstellend wieder. Zudem ist die Relevanz der subsonischen Lösungen in Bezug auf den Energietransfer zwischen Strömung und Struktur wegen  $\Delta\varphi_{0,\nu} = \pi$  sehr klein. Wenngleich der qualitative Charakter der Lösungen richtig wiedergegeben wird, seien in Hinblick auf eine detaillierte Validierung der Grenzschichtmechanismen die wichtigsten Unterschiede in den Modellannahmen, die zu den beobachteten Abweichungen führen können, zusammengefasst:

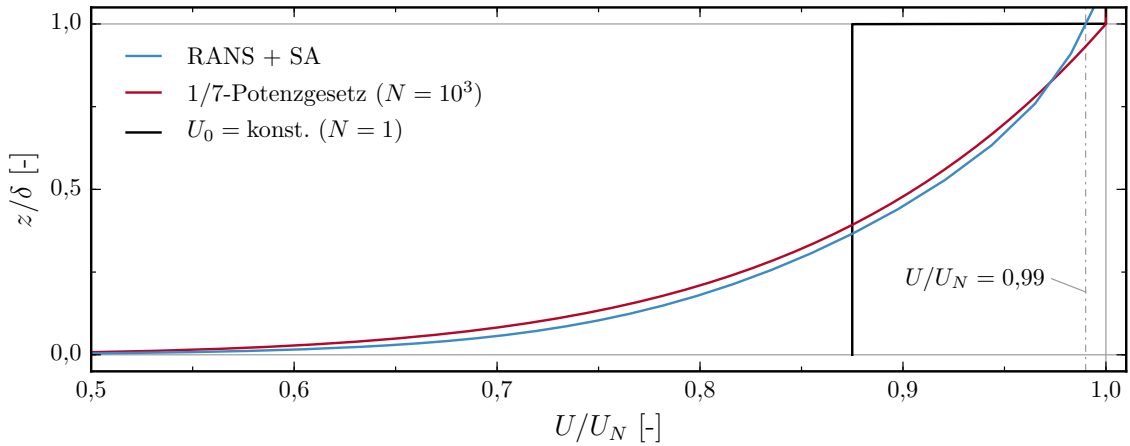
- (1) Am Übergang von der Gleit- zur Hafttrandbedingung (vgl. Abbildung 4.4) bildet sich ein Staupunkt aus, gefolgt von einem negativen Druckgradient des ungestörten Strömungsfeldes in  $x$ -Richtung. Diese Druckabnahme von  $\approx 1 \%$  über der gesamten welligen Wand führt an der Auswerteposition zu einer Abweichung des Referenzdrucks von  $\epsilon < 0,5 \%$ . Zur Bestimmung des korrekten Stördruckkoeffizienten  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  wird die Lösung der unverformten Wand von jener der welligen Wand abgezogen. Ein geringfügiger Einfluss dieses Druckgradienten auf das Ergebnis lässt sich dennoch nicht ausschließen.
- (2) Durch die Verwendung einer Hafttrandbedingung ist bei der Lösung der RANS-Gleichungen die Strömungsgeschwindigkeit auf der Wand immer Null. Bei der analytischen Modellbildung entspricht die Geschwindigkeit auf der Wand hingegen der Relativgeschwindigkeit  $\underline{U}_{0,\nu} = U_0 - V_\nu$ . Zwar nimmt diese Diskrepanz mit zunehmendem Wandabstand ab, weil die lokale Strömungsgeschwindigkeit gegenüber der Phasengeschwindigkeit  $V_\nu$  sehr groß wird. Dennoch ist nach Gleichung (6.13)  $V_\nu \propto k$  und kann daher bei höheren Frequenzen  $k$  zu zunehmenden Abweichungen zwischen



**Abbildung 6.18:** Gegenüberstellung der komplexen Stördruckamplitude  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  aus Lösungen der linearisierten Potentialgleichung und der Euler-/RANS-Gleichungen für  $k = 0$ .

der analytischen und numerischen Modellbildung führen. Bei den völligeren Geschwindigkeitsprofilen turbulenter Grenzschichten ist dieser Aspekt weniger kritisch als etwa bei laminaren Geschwindigkeitsprofilen. So zeigen identische Analysen bei höheren Frequenzen  $k$ , dass dieser Einfluss sehr gering ist (nicht dargestellt). Die Komplexität der Stördruckfelder in räumlich variierenden Geschwindigkeitsfeldern verhindert jedoch eine Quantifizierung des Fehlers.

- (3) Wird im analytischen Modell von einer konstanten Grenzschichtdicke ausgegangen, so nimmt diese bei der Lösung der RANS-Gleichungen stetig zu. Der in den vorangegangenen Untersuchungen betrachtete Fall einer Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 0.1$  an der Auswerteposition korreliert mit einer Zunahme von  $\Delta\delta \approx 9.83\%$  über die Länge  $L$ . Darüber hinaus bezieht sich die Grenzschichtdicke  $\delta$  im Gegensatz zu den analytischen Studien auf die  $\delta_{99}$ -Dicke. Folglich unterscheidet sich auch der Bereich



**Abbildung 6.19:** Gegenüberstellung der Grenzschicht-Geschwindigkeitsprofile aus Lösung der RANS-Gleichungen, nach dem 1/7-Potenzgesetz sowie für  $M_0 = U_0 = \text{konst.}$

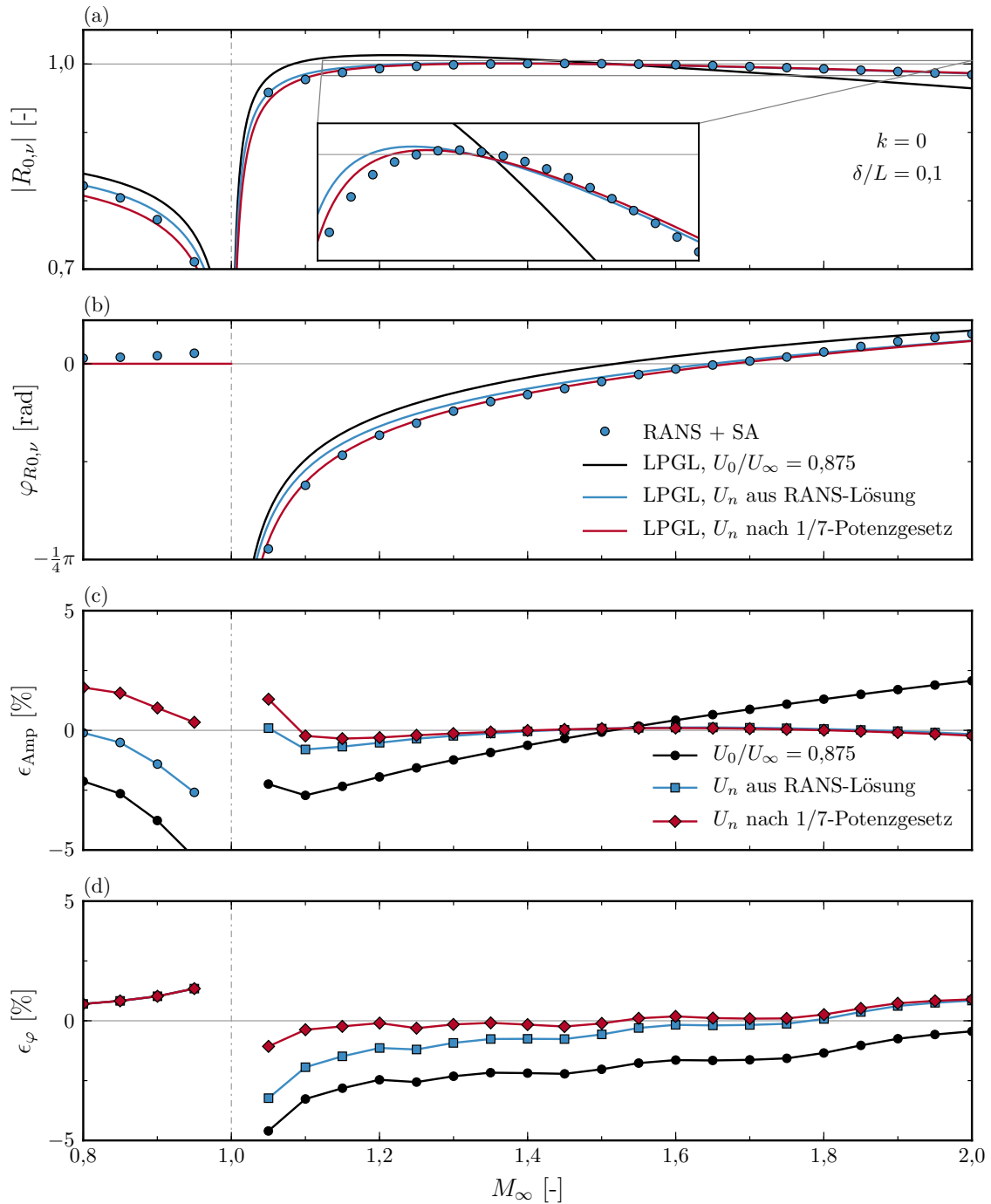
der freien Anströmung etwas von den analytischen Modellannahmen (vgl. Abbildung 6.19).

- (4) Letztendlich sind die in Abschnitt 3.2 diskutierten Unterschiede zwischen den Modellannahmen der RANS-Gleichungen und der linearisierten Potentialgleichung zu berücksichtigen, wobei hier insbesondere der Viskosität des Fluids eine besondere Bedeutung zukommt.

Während die Fehlerquellen (1) und (2) in den folgenden Untersuchungen zu nicht gewünschten Abweichungen zwischen den numerischen und analytischen Lösungen führen, sind die beiden letztgenannten Einflussmechanismen physikalisch plausibel und stellen somit ein wichtiges Indiz für die Beurteilung, in welchem Maße die aeroelastische Stabilität ebener Schalen durch die Geschwindigkeitsverteilung oder etwaige andere Mechanismen in der Grenzschicht beeinflusst wird, dar. Da das eigentliche Geschwindigkeitsprofil zunächst als primärer Einflussfaktor vermutet wird, seien alle weiteren Einflussfaktoren, etwa die variierende Grenzschichtdicke oder viskose Effekte, zusammenfassend als sekundäre Einflussmechanismen bezeichnet.

Die in Abschnitt 6.2 identifizierten Grenzschichtmechanismen lassen sich am besten über einen Vergleich der Einflussfunktionen  $R_{0,\nu=-1}$  verifizieren. Hierfür eignet sich wieder der Schnitt durch den  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum bei  $k = 0$ , der die relevanten Grenzschichtmechanismen wiedergibt, einen Vergleich mit dem potentialtheoretischen Mehrschichtmodell für  $N > 1$  erlaubt sowie den unerwünschten Einfluss der Hafrandbedingung eliminiert. Die RANS-Lösungen seien im Folgenden den analytischen Lösungen auf Basis drei verschiedener Geschwindigkeitsprofile gegenübergestellt: (1)  $N = 1$  mit  $M_0 = 0,875M_\infty$ , (2)  $N = 10^3$  mit dem Geschwindigkeitsprofil der RANS-Lösung und (3)  $N = 10^3$  mit einem Geschwindigkeitsprofil gemäß dem 1/7-Potenzgesetz nach Gleichung (6.58). Ein Vergleich in Abbildung 6.19 zeigt zunächst, dass die Lösung der RANS-Gleichungen eine etwas volligere Geschwindigkeitsverteilung aufweist als jene auf Grundlage des 1/7-Potenzgesetzes. Die höheren Geschwindigkeiten lassen nach den Erkenntnissen der analytischen Studien einen zunehmenden Überschallcharakter der resultierenden Stördruckverteilung erwarten (vgl. Abschnitt 6.2.4).





**Abbildung 6.20:** Gegenüberstellung der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  aus Lösung der Euler- bzw. RANS-Gleichungen und der linearisierten Potentialgleichung.



Abbildungen 6.20(a) und (b) zeigen die analytisch und numerisch bestimmten Einflussfunktionen  $R_{0,\nu=-1}$  in Form des Betrages  $|R_{0,\nu}|$  und der Phase  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  sowie die prozentuale Abweichung der numerischen Lösungen von jenen der drei oben aufgeführten analytischen Grenzschichtmodelle (vgl. Abbildungen 6.20(c) und (d)). Die Fehler  $\epsilon_{\text{Amp}}$  und  $\epsilon_{\varphi}$  sind analog zu den vorangegangenen Untersuchungen nach Gleichung (6.60) und (6.61) ( $\tilde{c}_{p0,\nu}$  sei durch  $R_{0,\nu}$  ersetzt) bestimmt. Hierbei lässt sich zunächst feststellen, dass der qualitative Charakter der analytischen Lösungen für  $|R_{0,\nu}|$  und  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  richtig wiedergegeben wird. Die Berücksichtigung mehrerer Unterschichten ( $N = 10^3$ ) führt indessen zu einer Verbesserung der quantitativen Übereinstimmung beider Kenngrößen. Die jeweiligen Abweichungen lassen Rückschlüsse auf verschiedene Fehlerquellen zu:

- (1)  $N = 1$ ,  $M_0 = 0,875M_\infty$ : Entspricht dem aufsummierten Fehler aus der Annahme einer räumlichen Mittelung der Geschwindigkeitsverteilung über die Grenzschichtdicke sowie der Vernachlässigung sekundärer Einflussmechanismen.
- (2)  $N = 10^3$ , Geschwindigkeitsverteilung der RANS-Lösung: Da das Geschwindigkeitsprofil dem der RANS-Lösung entspricht, lässt sich aus einem Vergleich mit (1) die Sensitivität der Lösung in Bezug auf die Vernachlässigung sekundärer Einflüsse ableiten.
- (3)  $N = 10^3$ , 1/7-Potenzgesetz: Hebt durch einen Vergleich mit (2) die Sensitivität der Lösung in Bezug auf die exakte Geschwindigkeitsverteilung hervor.

Die Diskussion der Ergebnisse orientiert sich wieder an einer Einteilung der Stördruckfelder in den hohen Unterschallbereich sowie in den niedrigen und hohen Überschallbereich.

### Stördruckfelder in subsonischer Strömung

In einer rein subsonischen Strömung wird die Amplitudenreduktion durch die Modellierung der Grenzschicht mit nur einer Unterschicht ( $N = 1$ ) um bis zu  $\epsilon_{\text{Amp}} \approx 5\%$  unterschätzt (vgl. Abbildung 6.20(c)). Dies ist konsistent mit der Erkenntnis aus Abschnitt 6.2.6, wonach die Ergebnisse aus der räumlichen Mittelung des Geschwindigkeitsprofils eine Tendenz zu völligeren Grenzschichtprofilen zeigen. Eine deutliche Verbesserung der Übereinstimmung ergibt sich durch die Vorgabe nicht-konstanter Geschwindigkeitsprofile mit  $N = 10^3$  Unterschichten. Aufgrund der etwas stärkeren Abnahme von  $|R_{0,\nu}|$  mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  (vgl. Abbildung 6.20(a)) zeigt sich zunächst eine sehr gute Übereinstimmung mit der aus der RANS-Lösung ermittelten Geschwindigkeitsverteilung und für hohe Machzahlen eine etwas bessere Übereinstimmung mit dem 1/7-Potenzgesetz. Die Abweichungen beider Modelle liegen hierbei im Bereich von  $|\epsilon_{\text{Amp}}| < 3\%$ . Anhand der oben aufgeführten Zusammenhänge (1) und (2) lässt sich schlussfolgern, dass mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  sekundäre Einflussmechanismen an Bedeutung gewinnen. Zudem zeigt die Lösung bezüglich des Zusammenhangs (3) ein sehr sensibles Verhalten gegenüber leichter Variationen des Geschwindigkeitsprofils.

Die Phasenverschiebung der Stördruckverteilung unterliegt mit  $\epsilon_{\varphi} < 1,5\%$  nur geringfügigen Abweichungen vom erwarteten Wert  $\varphi_{R_{0,\nu}} = 0$  (vgl. Abbildung 6.20(d)). Zusammenfassend untermauern die guten qualitativen und quantitativen Übereinstimmungen der Ergebnisse die Richtigkeit der in Abschnitt 6.2.4 diskutierten Grenzschichtmechanismen in subsonischen Strömungen.

### Stördruckfelder im niedrigen Überschall

Im niedrigen Überschall konnten in Abschnitt 6.2.4 zwei wesentliche Merkmale der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  identifiziert werden. So wurde zunächst für  $M_\infty \rightarrow 1^+$  eine signifikante Abnahme der Stördruckamplitude,  $|R_{0,\nu}| \rightarrow 0$ , sowie eine Änderung der Phasenverschiebung  $\varphi_{R_{0,\nu}} \rightarrow -\pi/2$  beobachtet und mit dem dämpfenden Charakter der subsonischen Grenzschicht erklärt. Durch die Wahl eines nicht-konstanten Geschwindigkeitsprofils kommt es in diesem Machzahlbereich zu einer deutlichen Verbesserung der Übereinstimmung zwischen den analytischen und numerischen Lösungen. Die Abweichungen der Phasenverschiebung  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  in den Abbildungen 6.20(b) und (d) zeigen gemäß des Zusammenhangs (2), dass sekundäre Einflussmechanismen einen hohen Einfluss auf die Stördruckverteilung in schallnahen Geschwindigkeitsbereichen haben. Dass der Unterschallcharakter der Grenzschicht nach dem potentialtheoretischen Lösungsansatz unterschätzt wird, deutet darauf hin, dass die Vernachlässigung der Viskosität für die geringere Stördrückdämpfung verantwortlich ist. Der Zusammenhang (2) und (3) lässt zudem auf eine hohe Sensitivität der Lösung bezüglich der lokalen Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht schließen.

Als zweites Merkmal der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  wurde für ansteigende Machzahlen eine Zunahme der Stördruckamplituden gegenüber der reibungsfreien Strömung, d.h.  $|R_{0,\nu}| > 1$ , beobachtet. Die Lösungen der RANS-Gleichungen bestätigen dieses Phänomen (vgl. Abbildung 6.20(a)), wenngleich die räumliche Mittelung des Geschwindigkeitsprofils zu einer Überschätzung der Stördruckamplituden in der grenzschichtbehafteten Strömung führt.

### Stördruckfelder im hohen Überschall

In Abschnitt 6.2.4 wurde der Bereich des hohen Überschalls dadurch charakterisiert, dass die Geschwindigkeit des Grenzschichtprofils im Mittel supersonisch ist. Somit konnte die Stördruckausbreitung entlang der Mach'schen-Linien, verbunden mit einer deutlichen Abnahme des am Grenzschichttrand reflektierten Wellenanteils, als wesentlicher Mechanismus des Grenzschichteinflusses identifiziert werden. Die numerischen Lösungen bestätigen diese Ergebnisse indirekt durch eine geringfügige Abnahme von  $|R_{0,\nu}|$  und den Vorzeichenwechsel von  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  (vgl. Abbildungen 6.20(a) und (b)). Mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  führt die Annahme einer konstanten Geschwindigkeit in der Grenzschicht ( $N = 1$ ) allerdings zu einem hohen quantitativen Fehler bezüglich  $|R_{0,\nu}|$  und  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  (vgl. Abbildungen 6.20(c) und (d)). So nimmt  $\epsilon_{\text{Amp}}$  mit steigender Machzahl  $M_\infty$  linear zu, während die Lösungen der komplexeren Grenzschichtprofile ( $N = 10^3$ ) nur unwesentlich von den Lösungen der RANS-Gleichungen abweichen und entsprechend des Zusammenhangs (2) keinen nennenswerten Einfluss der sekundären Einflussmechanismen zeigen. Zudem sind die Stördrücke gemäß des Zusammenhangs (3) nahezu unbeeinflusst von leichten Variationen des Geschwindigkeitsprofils.

Zusammenfassend lässt sich für den betrachteten Machzahlbereich feststellen, dass die wesentlichen Merkmale der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$  bereits durch eine räumliche Mittelung des Geschwindigkeitsprofils der Grenzschicht gut wiedergegeben werden und somit die in Abschnitt 6.2.4 diskutierten Mechanismen des Grenzschichteinflusses qualitativ richtig erfasst wurden. Hierbei ist insbesondere die Dämpfung stromab wandernder Stördruckwellen für  $M_\infty \rightarrow 1$  hervorzuheben. Die quantitative Genauigkeit des potentialtheoretischen Modellansatzes lässt sich zudem durch eine realistischere Geschwindigkeitsverteilung über

mehrere Fluidschichten ( $N > 1$ ) deutlich erhöhen. Dies kann folglich als Nachweis gewertet werden, dass die lokale Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht maßgeblich die nominelle Reduktion des Energietransfers zwischen Strömung und Struktur erklärt und somit den dämpfenden Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastische Stabilität ebener Schalen verantwortet.

## 6.4 Einfluss aerodynamischer Nichtlinearitäten und geometrischer Randbedingungen

Aufgrund der zahlreichen Vereinfachungen in den vorangegangenen Untersuchungen soll im Folgenden insbesondere der Frage nachgegangen werden, welchen Einfluss realistische geometrische Randbedingungen auf die instationären Luftkräfte haben. Unter Berücksichtigung der lokalen Begrenzungen in  $x$ -Richtung von  $0 \leq \xi \leq 1$  und in  $y$ -Richtung von  $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$  werden hierzu die bewegungsinduzierten Lasten in Bezug auf unterschiedliche finite Anregungsformen untersucht. Die eindimensionalen Anregungsformen

$$\psi_{r,p} = \sin(r\pi\xi) \quad (6.62)$$

und

$$\psi_{r,c} = (\cos((r-1)\pi\xi) - \cos((r+1)\pi\xi)) \quad (6.63)$$

entsprechen den Eigenschwingungsformen der beidseitig gelenkig gelagerten und fest eingespannten (eindimensionalen) ebenen Schale. Hieraus leiten sich die gewählten Indizierungen  $(\cdot)_p$  (aus dem englischen *pinned*) und  $(\cdot)_c$  (aus dem englischen *clamped*) ab. Die räumlich unbegrenzte Anregungsform der analytischen Vergleichslösung sei in diesem Zusammenhang mit  $\psi_{r,\text{inf}}$  referenziert. Analog dazu werden die zweidimensionalen Anregungsformen

$$\psi_{r,pp} = \sin(r\pi\xi) \cos(\pi\eta) \quad (6.64)$$

und

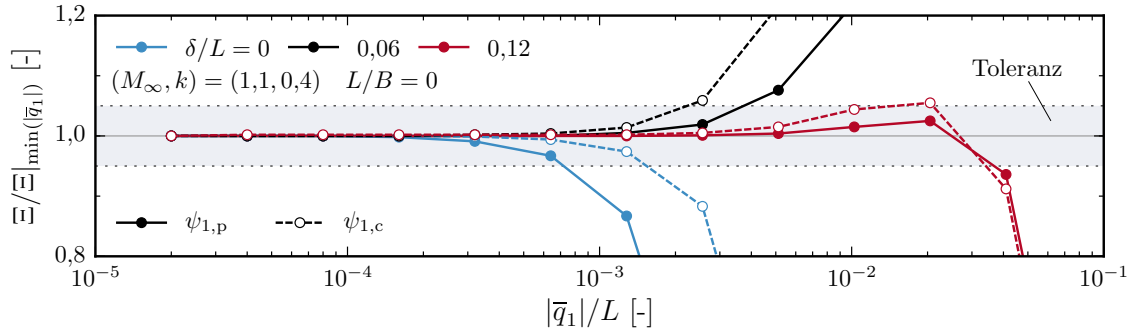
$$\psi_{r,cc} = (\cos((r-1)\pi\xi) - \cos((r+1)\pi\xi)) (1 - \cos(2\pi\eta + \pi)) \quad (6.65)$$

herangezogen, um den Einfluss der seitlichen Einspannung zu untersuchen. Die doppelte Indizierung  $(\cdot)_{pp}$  und  $(\cdot)_{cc}$  kennzeichnet die Art der Einspannung parallel und quer zur Strömungsrichtung und dient auf diese Weise der Unterscheidung eindimensionaler und zweidimensionaler Anregungsformen. In der vorliegenden Arbeit ist die Halbwellenzahl der Eigenschwingungsform quer zur Strömungsrichtung stets  $r_y = 1$  und wird daher nicht separat gekennzeichnet ( $r_x \equiv r$ , vgl. Abschnitt 2.1).

Da diese Untersuchungen nur für den dynamisch linearen Fall relevant sind, sei zunächst mithilfe des Tau-Verfahrens untersucht, bis zu welchen Schwingungsamplituden von einem dynamisch linearen Antwortverhalten des Strömungsfeldes ausgegangen werden kann und was die physikalische Ursache für die dynamischen Nichtlinearitäten ist.

Aus den vorangegangenen Untersuchungen ist die charakteristische Verteilung der generalisierten Luftkräfte im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum bekannt. Daher bietet es sich an, die folgenden Detailanalysen auf vier ausgewählte Parameterkombinationen zu konzentrieren. Abbildung 6.21 zeigt einen Ausschnitt der analytisch ermittelten Imaginärwertverteilung der generalisierten Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{11})$  mit vier Parameterkombinationen, die nach folgenden Kriterien gewählt sind:





**Abbildung 6.22:** Dynamisches Linearitätsverhalten der normierten Arbeit  $W_{\text{cyc}}$  für die eindimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,p}$  und  $\psi_{1,c}$ .

linearen Antwortverhalten wird durch eine Normierung der Arbeit mit dem Quadrat der Schwingungsamplitude  $|\bar{q}_1|^2$  hervorgehoben:

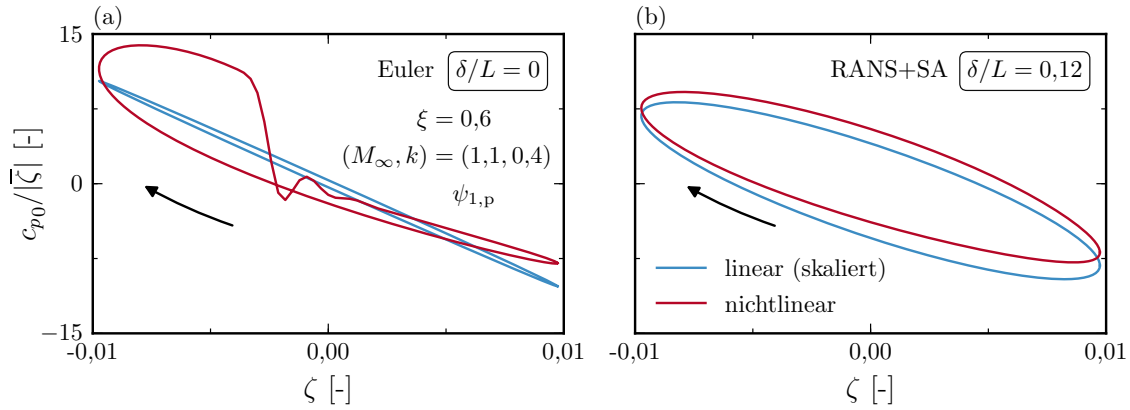
$$\Xi = \frac{W_{\text{cyc}}}{|\bar{q}_1|^2} . \quad (6.66)$$

Da bei sehr kleinen Schwingungsamplituden von einer dynamisch linearen Strömungsantwort ausgegangen werden kann, seien die Ergebnisse der größeren Schwingungsamplituden auf jene für die minimale Amplitude  $\min(\bar{q}_1)$  normiert. Somit kennzeichnet ein Abweichen von  $\Xi/\Xi|_{\min(\bar{q}_1)} = 1$ , dass dynamische Nichtlinearitäten die Lösung beeinflussen. Abbildung 6.22 stellt die Ergebnisse exemplarisch für den Punkt P4 dar, der für die eindimensionalen Anregungsformen am ehesten zu Abweichungen führt und daher den kritischsten Fall darstellt. Die Lösungen für die Parameterkombinationen P1 bis P3 zeigen qualitativ vergleichbare Ergebnisse und sind in Anhang D zusammengefasst. Da einige Lösungen im Bereich sehr kleiner Amplituden zunächst geringfügige Abweichungen vom Zielwert Eins zeigen, sich bei einer weiteren Amplitudenerhöhung jedoch ein dynamisch lineares Antwortverhalten andeutet, wird das Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten als Überschreitung eines Toleranzbereiches von  $\epsilon = \pm 5\%$  definiert.

### Dynamische Nichtlinearitäten zweidimensionaler Strömungsfelder

Aus Abbildung 6.22 lässt sich entnehmen, dass für eine eindimensionale Anregungsform bis zu einer Verformungsamplitude von  $|\bar{q}_1|/L \approx 7 \cdot 10^{-4}$  von einer dynamisch linearen Systemantwort ausgegangen werden kann. In diesem Fall stellt die Anregungsform  $\psi_{1,p}$ , welche der eindimensionalen gelenkig gelagerten Schale entspricht, den kritischsten Fall dar. Eine Zunahme der Grenzschichtdicke  $\delta$  verschiebt das Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten hin zu höheren Schwingungsamplituden. Diese Tendenz lässt sich in unterschiedlicher Ausprägung auch auf die Parameterkombinationen P1 bis P3 übertragen.

Als Hauptursache für das Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten kann ein Verdichtungsstoß identifiziert werden, der sich an der Hinterkante der verformten Struktur ausbildet und anschließend stromauf wandert. Die Phasenraumportraits der lokalen Stördruckbeiwerte  $c_p(\xi = 0,6)$  in Abbildung 6.23(a) verdeutlichen anhand einer Gegenüberstellung der linearen (skaliert auf die Amplitude der nichtlinearen Lösung) und nichtlinearen Lösung, dass es während der Aufwärtsbewegung in einer reibungsfreien Strömung zunächst zu einer signifikanten Zunahme des effektiven Energietransfers zwischen Strömung und Struktur



**Abbildung 6.23:** Dynamisches Antwortverhalten reibungsfreier (links) und reibungsbehafteter (rechts) Strömungen im  $c_{p0}$ - $\zeta$ -Phasenraum.

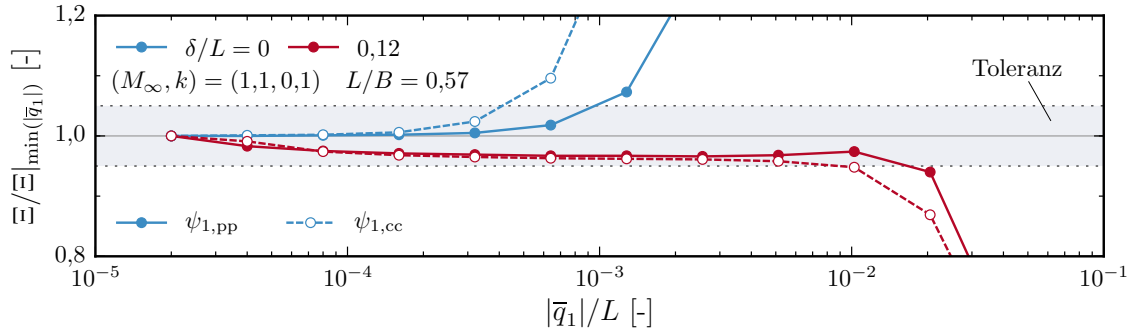
kommt, d.h. die von der Lösungskurve eingehüllte Fläche größer wird. Sobald der Verdichtungsstoß die betrachtete Position  $\xi = 0,6$  passiert, folgt ein starker Druckabfall. Dieser Effekt lässt sich ebenfalls an anderen Positionen der Schale nachweisen, tritt jedoch für  $\xi = 0,6$  am deutlichsten in Erscheinung. Durch die Präsenz einer Grenzschicht mit der Dicke  $\delta/L = 0,12$  wird die Stärke des Verdichtungsstoßes wegen der lokal abnehmenden Strömungsgeschwindigkeit im wandnahen Bereich reduziert. Die Lösung weist in diesem Fall weiterhin einen annähernd linearen Charakter auf, d.h. die Lösungskurve beschreibt im Phasenraum eine Ellipse. Hierbei bleibt der normierte Energietransfer zwischen Strömung und Struktur annähernd konstant.

### Dynamische Nichtlinearitäten dreidimensionaler Strömungsfelder

Aus der Analyse dreidimensionaler Strömungsfelder lässt sich im Kontext der dynamischen Linearitätseigenschaften der Einfluss der seitlichen Einspannung ableiten. Der kritischste Fall (P3) ist in Abbildung 6.24 dargestellt und zeigt, dass das Systemverhalten in reibungsfreien Strömungen bis zu einer Verformungsamplitude von  $|\bar{q}_1|/L \approx 5 \cdot 10^{-4}$  als dynamisch linear beschrieben werden kann. Dabei ist stets ein gutmütiger Einfluss turbulenter Grenzschichten (d.h. ein Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten bei höheren Verformungsamplituden) erkennbar, der wieder auf die Reduktion der Stoßstärke in der Grenzschicht zurückgeführt werden kann. Darüber hinaus deuten die Ergebnisse an, dass die allseitig fest eingespannte Schale ( $\psi_{1,cc}$ ) etwas früher dynamischen Nichtlinearitäten unterliegt als ihr gelenkig gelagertes Pendant ( $\psi_{1,pp}$ ). Da dies jedoch in Hinblick auf die zweidimensionalen Strömungsfelder nicht für alle Fälle zutrifft (vgl. Anhang D), lässt sich dieses Ergebnis nicht verallgemeinern.

Für die Parameterkombinationen P1, P2 und P4 tendiert die Anregung dreidimensionaler Strömungsfelder zu einem gutmütigeren Verhalten als jene der zweidimensionalen Strömungsfelder (vgl. Abbildung D.1). Zwar widerspricht der Fall P3 diesem Trend, dennoch erfolgt das Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten bezüglich der Verformungsamplitude  $|\bar{q}_1|$  in der gleichen Größenordnung. Ein Vergleich zwei- und dreidimensionaler Stördruckfelder zeigt, dass es bei Letzteren durch Druckausgleichsströmungen in  $y$ -Richtung zu deutlichen Abnahmen der lokalen Strömungsgeschwindigkeit kommt, die den zunehmend nichtlinearen Kompressibilitätseffekten ebenfalls entgegenwirken.





**Abbildung 6.24:** Dynamisches Linearitätsverhalten der normierten Arbeit  $W_{\text{cyc}}$  für die zweidimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,\text{pp}}$  und  $\psi_{1,\text{cc}}$ .

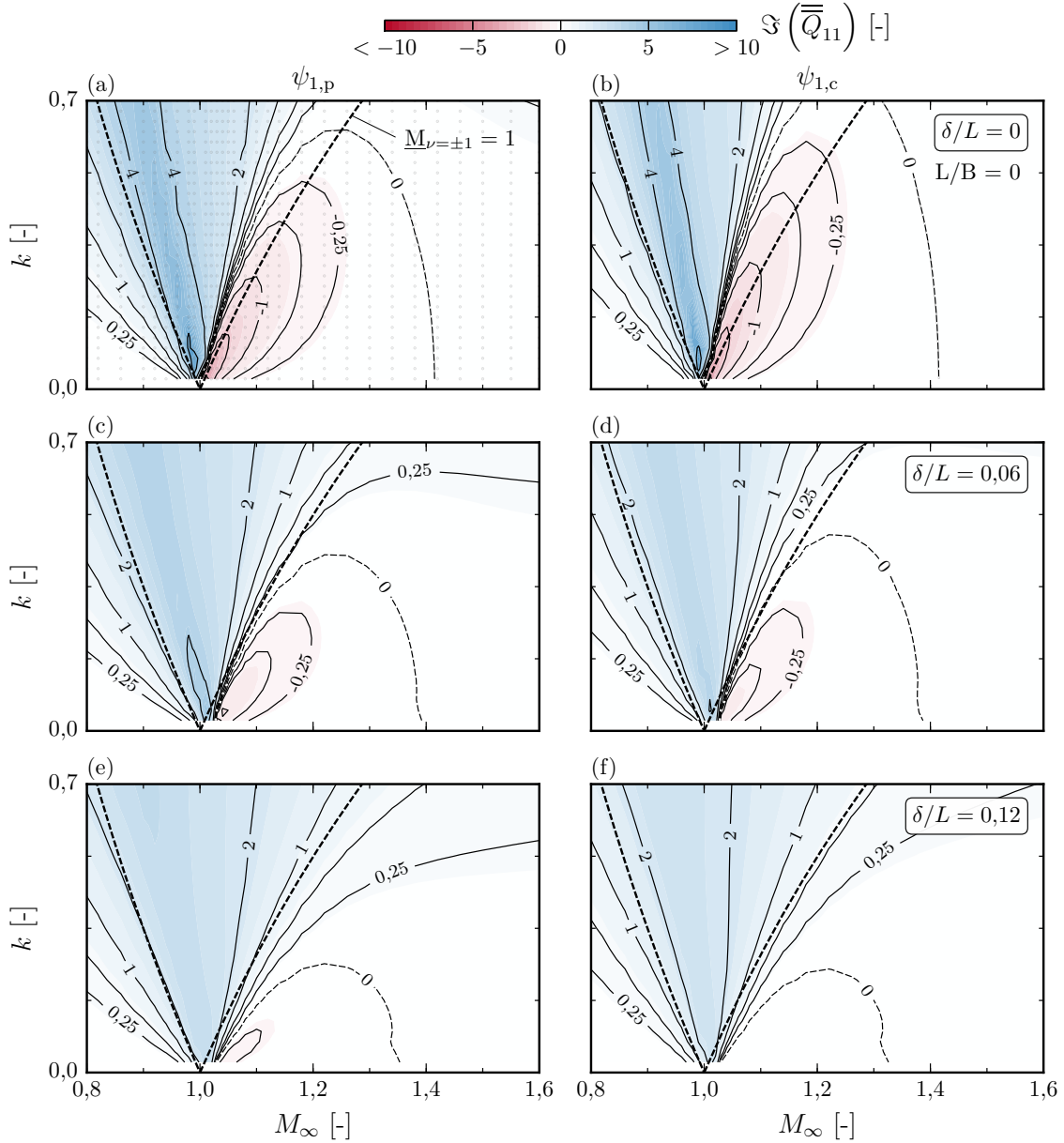
Die Ursache für die Abweichung der normierten Lösungen im Bereich sehr kleiner Verformungsamplituden  $|\bar{q}_1|$  wurde in dieser Arbeit nicht genauer analysiert, da diese sehr klein sind und bei einer weiteren Amplitudenerhöhung zunächst keine Anzeichen dynamisch nichtlinearer Phänomene erkennbar sind. Die Gesamtheit der Ergebnisse verdeutlicht, dass die Mechanismen beim Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten äußerst komplex sind (vgl. Anhang D). Da jedoch nicht zu erwarten ist, dass detailliertere Untersuchungen in diesem Kontext einen wesentlichen Beitrag zur Beantwortung der zweiten Leithypothese leisten, seien die nichtlinearen Mechanismen an dieser Stelle nicht näher betrachtet. Die folgenden Studien beziehen sich daher allein auf den dynamisch linearen Bereich.

### 6.4.2 Variation der Anregungsform

In den folgenden Untersuchungen werden reibungsfreie und reibungsbehaftete Strömungsfelder über die eindimensionalen Anregungsformen  $\psi_{r,\text{p}}$  und  $\psi_{r,\text{c}}$  sowie über die zweidimensionalen Anregungsformen  $\psi_{r,\text{cc}}$  und  $\psi_{r,\text{pp}}$  zu harmonischen Schwingungen angeregt. Auf diese Weise lässt sich der Einfluss finiter Schallengeometrien auf die generalisierten Luftkräfte  $\bar{Q}_{rs}$  studieren. In Abschnitt 2 wurde erläutert, dass Eigenschwingungsformen mit höheren Wellenzahlen quer zur Anströmung keiner aerodynamischen Kopplung unterliegen und somit in den folgenden Untersuchungen weiterhin vernachlässigt werden können. Der Fokus liegt zudem auf  $r = 1$ , da die physikalischen Mechanismen für die Anregungsform  $\psi_{r,\text{inf}}$  qualitativ unabhängig von der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  sein sollten. Die Übertragbarkeit dieser These auf die generalisierten Luftkräfte für finite Schallengeometrien sei abschließend für  $r = 2$  überprüft.

#### Eindimensionale Anregungsformen, $r = 1$

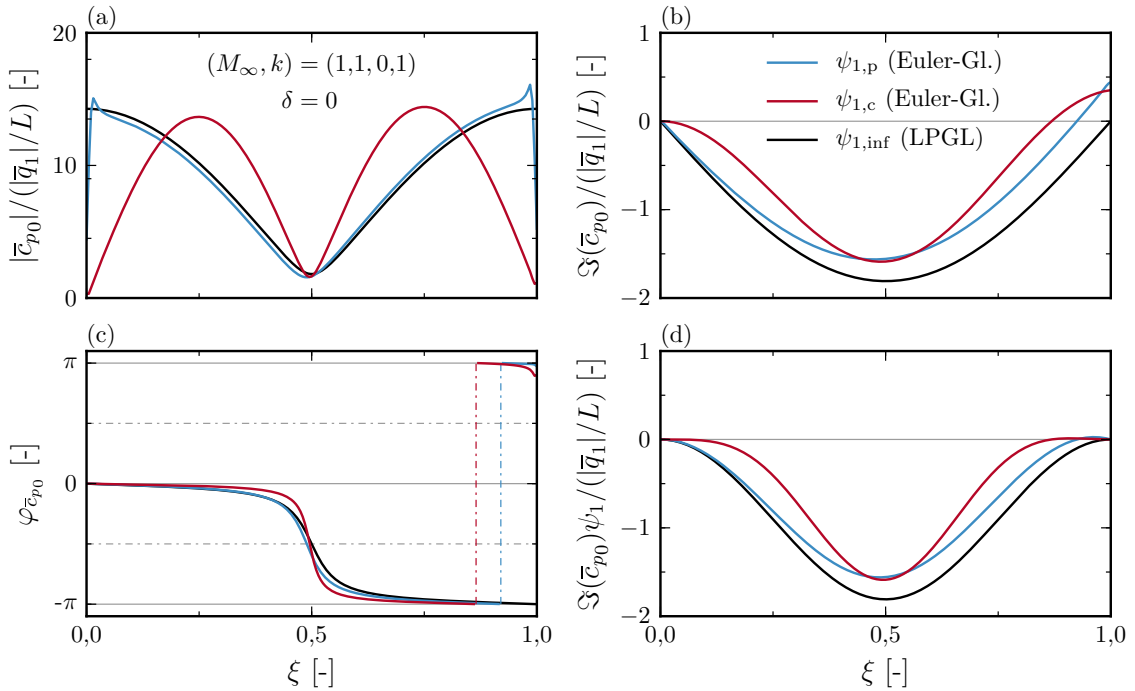
Ein Vergleich des globalen Energietransfers in grenzschichtfreien Strömungen zeigt, dass durch die räumlich begrenzte Anregung  $\psi_{1,\text{p}}$  der Bereich des  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraumes, in dem  $\Im(\bar{Q}_{11}) < 0$  ist, deutlich reduziert wird (vgl. Abbildung 6.5(b) mit Abbildung 6.25(a)). Für  $\psi_{1,\text{c}}$  ist dieser Effekt etwas schwächer ausgeprägt (vgl. Abbildung 6.25(b)). Eine Gegenüberstellung beider Lösungen deutet jedoch an, dass für  $M_\infty \rightarrow 1$  und  $k \rightarrow 0$  der nominelle Energietransfer auf die Eigenschwingungsform der gelenkig gelagerten Schale ( $\psi_{1,\text{p}}$ ) gegenüber dem der fest eingespannten Schale ( $\psi_{1,\text{c}}$ ) etwas überwiegt und Letztere im Kontext des Ein-Freiheitsgrad-Flutterns den kritischeren Fall darstellen kann.



**Abbildung 6.25:** Generalisierte Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{11})$  auf die eindimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,p}$  (links) und  $\psi_{1,c}$  (rechts) in reibungsfreien (oben) und reibungsbehafteten Strömungen (mittig, unten).

Um diesen Effekt zu verstehen, sei die lokale Verteilung der komplexen Stördruckamplitude  $\bar{c}_{p0}(\xi)$  für die Parameterkombination P3 genauer analysiert. Da nach Ackeret [123]  $|\bar{c}_{p0}| \propto dw/dx$  ist, befindet sich das nominelle Maximum der Stördruckamplitude  $|\bar{c}_{p0}|$  für  $\psi_{1,p}$  und  $\psi_{1,inf}$  wie zu erwarten im Bereich der Einspannung. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse in Abbildung 6.26(a) zeigt für  $\psi_{1,p}$  eine leichte Reduktion der Stördruckamplitude, die einem lokal begrenzten Drucksprung im Bereich der Vorderkante folgt. Für  $\xi > 0,5$  kehrt sich der Effekt um. Diese Beobachtungen lassen sich auf den unstetigen Übergang von der Anregungsform zur unverformten Wand und einer damit einhergehenden Stördruckunstetigkeit zurückführen. Zusammen mit einer leichten Phasenverschiebung  $\varphi_{\bar{c}_{p0}}$  führt dies zu einer Verschiebung der lokalen Imaginärwertverteilung  $\Im(\bar{c}_{p0})$  hin zu

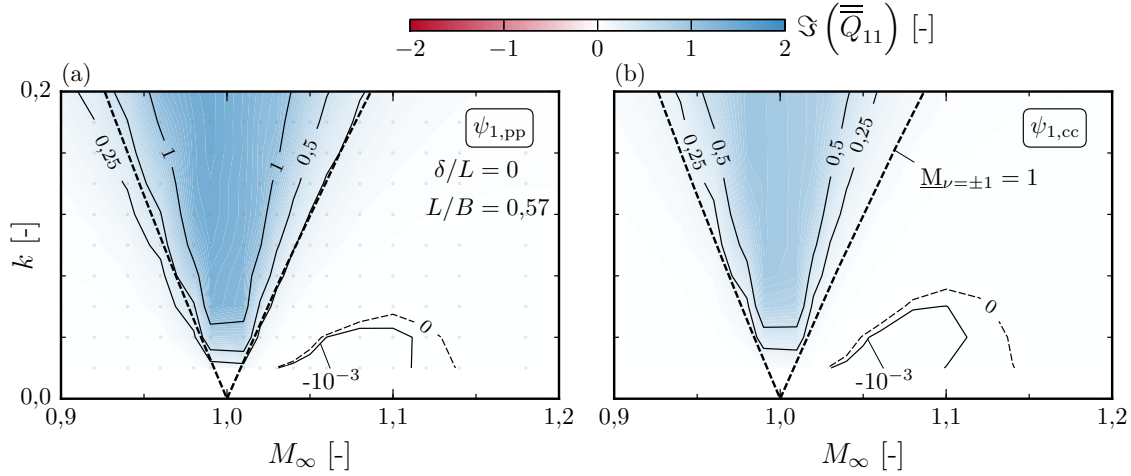




**Abbildung 6.26:** Vergleich der lokalen Stördruckverteilung  $\bar{c}_{p0}$  für die eindimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,inf}$ ,  $\psi_{1,p}$  und  $\psi_{1,c}$ .

positiven Werten. Durch die Wichtung mit der jeweiligen Anregungsform  $\psi_1(\xi)$  tragen die Randbereiche kaum zum Energieaustausch bei, während dem Fluid im Bereich der Schalenmitte weniger Energie entzogen wird, wenn die geometrischen Randbedingungen berücksichtigt werden. Für die Anregungsform  $\psi_{1,c}$  lässt sich zudem eine weitere Reduktion des nominellen Energietransfers im Bereich  $\xi \approx 0,25$  und  $\xi \approx 0,75$  nachweisen. Zwar finden sich hier aufgrund des Zusammenhangs  $|\bar{c}_{p0}| \propto dw/dx$  die nominellen Maxima der Stördruckamplitude  $|\bar{c}_{p0}|$ , jedoch überwiegt nun der Effekt, dass die Phasenverschiebung  $\varphi_{\bar{c}_{p0}}$  näher an den Grenzwerten  $\varphi_{\bar{c}_{p0}} = 0$  und  $\varphi_{\bar{c}_{p0}} = \pm\pi$  liegt, für die über einen Schwingungszyklus kein Energieaustausch mit dem Fluid stattfindet (vgl. Abbildung 6.26(c)). Dies drückt sich in Abbildung 6.26(d) durch eine nominelle Abnahme von  $\Im(\bar{c}_{p0})$  aus.

Interessant ist an dieser Stelle, dass die lokale Phasenverschiebung in Richtung der Hinterkante den Wert  $\varphi_{\bar{c}_{p0}} = -\pi$  überschreitet. Da für  $0 < \varphi_{\bar{c}_{p0}} < \pi$  das Vorzeichen der lokalen Imaginärwertverteilung  $\Im(\bar{c}_{p0})(\xi)$  positiv ist, wird im Bereich der stromab liegenden Einspannung Energie an das Fluid abgegeben. Zwar ist dieser Einfluss für die hier betrachtete Parameterkombination P3 gering, jedoch verschiebt sich der Zustand  $\varphi_{\bar{c}_{p0}} = -\pi$  mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  und Frequenz  $k$  in Richtung der Schalenmitte. Die Energieabfuhr an das Fluid im Bereich der Hinterkante gleicht somit den Energieentzug aus dem Fluid im vorderen Schalenbereich zunehmend aus und verantwortet schließlich einen Vorzeichenwechsel des integralen Energietransfers, d.h.  $\Im(\bar{Q}_{11}) > 0$ . Dies erklärt die deutliche Reduktion des Bereiches im  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum, für den  $\Im(\bar{Q}_{11}) < 0$  ist. Dass diese Reduktion für die Anregungsform  $\psi_{1,p}$  etwas stärker ausfällt als für  $\psi_{1,c}$  ist darauf zurückzuführen, dass sich die Verschiebung des Zustandes  $\varphi_{\bar{c}_{p0}} = \pm\pi$  in den Bereich der Schalenmitte für  $\psi_{1,p}$  bereits bei etwas kleineren Machzahlen  $M_\infty$  und Frequenzen  $k$  vollzieht.



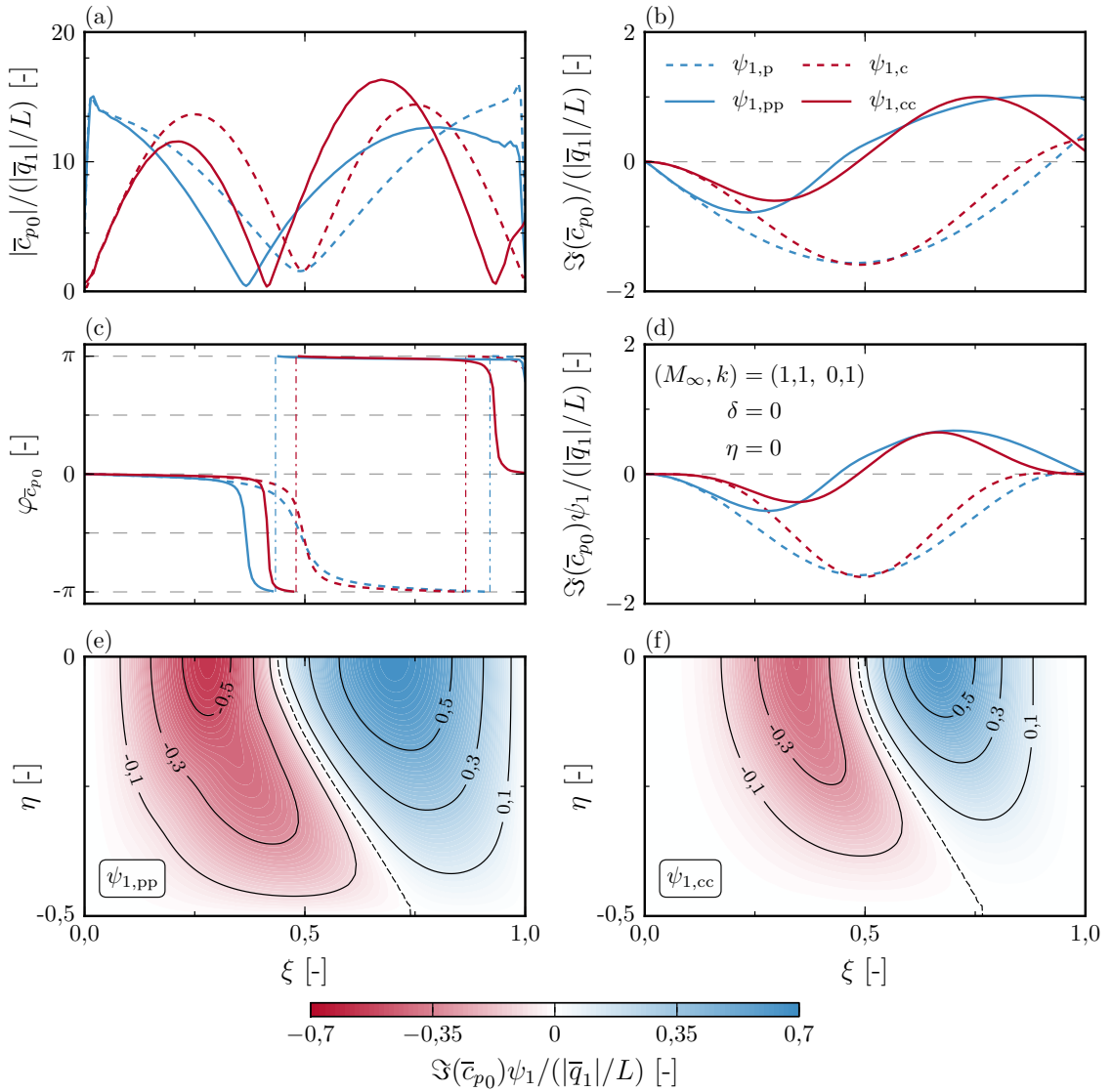
**Abbildung 6.27:** Generalisierte Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{11})$  auf die zweidimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,pp}$  (links) und  $\psi_{1,cc}$  (rechts) in einer reibungsfreien Strömung.

Abschließend sei die Präsenz turbulenter Grenzschichten berücksichtigt. Den Abbildungen 6.25(c) bis (f) kann entnommen werden, dass der Bereich  $\Im(\bar{Q}_{11}) < 0$  für die Anregungsformen  $\psi_{1,p}$  und  $\psi_{1,c}$  mit zunehmender Grenzschichtdicke  $\delta$  in gleichem Maße weiter reduziert wird. Dies entspricht den Erkenntnissen der analytischen Untersuchungen aus Abschnitt 6.2. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die vorab identifizierten Grenzschichtmechanismen auf die eindimensionale Schale mit einer finiten Länge  $L$  übertragbar sind.

### Zweidimensionale Anregungsformen, $r = 1$

Aus Abbildung 6.27 geht hervor, dass der Bereich des  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraumes, in dem die zweidimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,pp}$  und  $\psi_{1,cc}$  dem Fluid Energie entziehen ( $\Im(\bar{Q}_{11}) < 0$ ), im Vergleich zu den eindimensionalen Anregungsformen deutlich kleiner ausfällt (vgl. Abbildungen 6.25(a) und (b)). Darüber hinaus lässt sich für beide Schwingungsformen eine nominelle Abnahme des Energietransfers nachweisen. Um dies zu verstehen, sei wieder die lokale Stördruckverteilung  $\bar{c}_{p0}(\xi, \eta)$  betrachtet. Diese ist in den Abbildungen 6.28(a) bis (d) für den Mittelschnitt  $\eta = 0$  dargestellt. Dem sind die Ergebnisse der eindimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,p}$  und  $\psi_{1,c}$  gegenübergestellt. Da der Gradient  $dw/dx$  zu den seitlichen Rändern hin abnimmt, kommt es wegen  $|\bar{c}_{p0}| \propto dw/dx$  zu Druckausgleichsströmungen quer zur Anströmung, wodurch der Betrag der Stördruckamplitude  $|\bar{c}_{p0}|$  im Bereich der stromauf liegenden Schalenhälfte reduziert wird (vgl. Abbildung 6.28(a)). Im Bereich der stromab liegenden Schalenhälfte zeigt sich hingegen eine Überhöhung der Stördruckamplitude  $|\bar{c}_{p0}|$ .

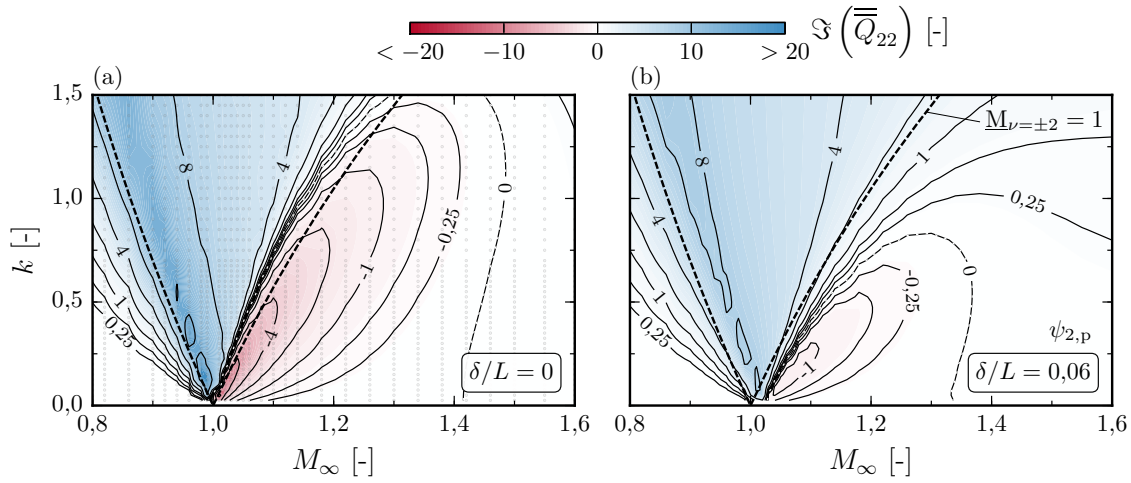
Durch die seitlichen Druckausgleichsströmungen verschiebt sich der Übergang von der gleichphasigen ( $\varphi_{\bar{c}_{p0}} \rightarrow 0$ ) zur gegenphasigen Druckantwort ( $\varphi_{\bar{c}_{p0}} \rightarrow -\pi$ ) stromauf zur Vorderkante, gefolgt von einem lokalen Vorzeichenwechsel der Phase  $\varphi_{\bar{c}_{p0}}$  im Bereich der Schalenmitte (vgl. Abbildung 6.28(c)). Der damit einhergehende Vorzeichenwechsel der lokalen Imaginärwertverteilung  $\Im(\bar{c}_p)$  (vgl. Abbildung 6.28(b)) führt dazu, dass im Bereich der stromab liegenden Schalenhälfte ein Großteil der Energie an das Fluid abgegeben wird ( $\Im(\bar{c}_p) > 0$ , vgl. Abbildung 6.28(d)). Über die gesamte Oberfläche zeigt sich zwar, dass



**Abbildung 6.28:** Vergleich der lokalen Stördruckverteilung  $\bar{c}_{p0}$  für die ein- und zweidimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,p}$ ,  $\psi_{1,c}$  und  $\psi_{1,pp}$ ,  $\psi_{1,cc}$ .

sich der Bereich des Energieentzugs aus dem Fluid ( $\Im(\bar{c}_p) < 0$ ) zu den seitlichen Rändern zunehmend stromab verlagert, dort jedoch durch die Wichtung mit den zweidimensionalen Eigenformen  $\psi_{1,pp}$  und  $\psi_{1,cc}$  zunehmend an Einfluss verliert (vgl. Abbildungen 6.28(e) und (f)). Da sich die Bereiche positiven und negativen Energietransfers nahezu ausgleichen, kommt es zu der eingangs beschriebenen nominellen Abnahme des integralen Energieaustausches  $\Im(\bar{Q}_{11})$  (vgl. Abbildung 6.27).

Die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht wirkt dem Energieentzug aus dem Fluid zusätzlich entgegen, bis im gesamten  $M_\infty$ - $k$ -Parameterraum lediglich Energie an das Fluid abgegeben wird ( $\Im(\bar{Q}_{11}) > 0$ ). In diesem Fall kann der Mechanismus des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns in schallnahen Strömungen ausgeschlossen werden. Da der stabilisierende Grenzschichteinfluss ausführlich in den vorangegangenen Untersuchungen diskutiert und unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen auch für räumlich begrenzte Anregungsformen nachgewiesen wurde, sei die Darstellung der generalisierten Luftkräfte  $\Im(\bar{Q}_{11})$



**Abbildung 6.29:** Generalisierte Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{22})$  in einer reibungsfreien (links) und reibungsbehafteten (rechts) Strömung.

in Abbildung 6.27 auf den Fall reibungsfreier Strömungen beschränkt.

### Eindimensionale Anregungsformen, $r = 2$

Bei einer Erhöhung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  sollte der Einfluss der Einspannung abnehmen, da sich die Anregungsformen  $\psi_r$  qualitativ der unendlichen langen oszillierenden Wand  $\psi_{r,\text{inf}}$  annähern. In Bezug auf den Grenzschichteinfluss wurde in Abschnitt 6.2.7 zudem der analytische Zusammenhang nachgewiesen, dass sich eine Verdopplung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  effektiv wie eine Verdopplung der Grenzschichtdicke  $\delta$  auswirkt und daher in schallnahen Strömungen der Unterschallcharakter der Stördruckverteilung  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  gefördert wird. Folglich müsste auch der dämpfende Einfluss auf die anregende Eigenform zunehmen.

Ein Nachweis dieser beiden Thesen sei exemplarisch für die generalisierte Luftkraft  $\Im(\bar{Q}_{22})$  der Anregungsform  $\psi_{2,p}$  erbracht. Zunächst lässt sich anhand eines Vergleichs der Abbildungen 6.16(a) und 6.29(a) erkennen, dass  $\Im(\bar{Q}_{22})$  in einer grenzschichtfreien Strömung besser mit der analytisch bestimmten Lösung übereinstimmt als  $\Im(\bar{Q}_{11})$  (vgl. Abbildungen 6.5(b) und 6.25(a)). Folglich hat der Einfluss der Einspannung auf die generalisierte Luftkraft abgenommen. Wird die Grenzschicht berücksichtigt, lassen sich die Ergebnisse der vorangegangenen Studien qualitativ reproduzieren, jedoch ist die nominelle Abnahme des Energietransfers zwischen Strömung und anregender Struktur deutlich ausgeprägter als jene für  $\psi_{1,p}$  (vgl. Abbildungen 6.25(a) und (b) mit Abbildungen 6.29(a) und (b)). Vergleichbare Schlussfolgerungen lassen sich ebenfalls aus Untersuchungen für  $\psi_{2,c}$ ,  $\psi_{2,pp}$  und  $\psi_{2,cc}$  ableiten und bestätigen somit die zweite der oben aufgeführten Thesen.

Interessant ist an dieser Stelle ein Rückblick auf die Ergebnisse der Verfahrensvalidierung in Abschnitt 4.5.4. Ausgehend vom niedrigen Überschall wurde in reibungsfreien Strömungen mit zunehmender Machzahl  $M_\infty$  ein Ein-Freiheitsgrad-Flattern der untersten vier Eigenschwingungsformen identifiziert, wobei höhere Machzahlen mit einer negativen aerodynamischen Dämpfung höherer Eigenschwingungsformen korrelieren (vgl. Abbildung 4.14). Vereinzelte Ergebnisse aus der Literatur bestätigen dieses Phänomen lediglich auf empirischer Basis unter Verwendung hochgenauer Lösungsansätze (siehe etwa Shishaeva et

al. [109]). Die phänomenologische Analyse des aerodynamischen Antwortproblems untermauert die These, dass in reibungsfreien Strömungen eine Ein-Freiheitsgrad-Instabilität höherer Eigenschwingungsformen bei hohen Frequenzen auftreten kann, da sich bei konstanter Machzahl  $M_\infty$  der Bereich  $\Im(\overline{Q}_{rr}) < 0$  mit zunehmendem  $r$  hin zu höheren Frequenzen  $k$  verschiebt. Darüber hinaus wird nun deutlich, warum in den empirischen Stabilitätsuntersuchungen in Abschnitt 5.2 die hochfrequenten Schwingungen so deutlich gedämpft werden (vgl. Abbildung 5.2). Dies ist auf den Mechanismus zurückzuführen, dass eine Erhöhung der Wellenzahl  $\alpha_\nu$  bei konstanter Grenzschichtdicke  $\delta$  vergleichbare Auswirkungen wie eine Erhöhung der Grenzschichtdicke  $\delta$  bei konstanter Wellenzahl  $\alpha_\nu$  hat und in diesem Kontext die effektive Dämpfung der Grenzschicht signifikant zunimmt. Das Phänomen des Ein-Freiheitsgrad-Flatterns höherer Eigenschwingungsformen ist folglich für praktische Anwendungen, in denen eine Grenzschicht stets präsent ist, kaum von Relevanz.

## 6.5 Zusammenfassung in Bezug auf die Zielstellung

Aus den empirischen Analysen der ersten Betrachtungsebene (Kapitel 5) wurde die Erkenntnis abgeleitet, dass sich die wesentlichen Mechanismen der aeroelastisch instabilen Systemzustände über eine linearisierte Formulierung der instationären Luftkräfte beschreiben lassen. Dies motivierte in der zweiten Betrachtungsebene (Kapitel 6), die phänomenologischen Mechanismen des Energietransfers zwischen Strömung und Struktur anhand sehr vereinfachter Modellannahmen im Frequenzbereich zu analysieren. Hierzu wurde mithilfe der linearisierten Potentialgleichung eine idealisierte Grenzschicht modelliert und das resultierende Strömungsfeld über eine vorgegebene Störfunktion zu harmonischen Schwingungen angeregt. Da diese Störfunktion als Überlagerung einer stromauf und einer stromab wandernden Welle beschrieben werden kann, lässt sich die Lösung auf eine stationäre Überströmung welliger Wände überführen. Auf diese Weise konnten die Einflussmechanismen der Grenzschicht über die Ausbreitungscharakteristik der bewegungsinduzierten Stördrücke im Grenzschichtbereich phänomenologisch interpretiert werden. Die wesentlichen Erkenntnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- 1) In einer subsonischen Strömung nimmt die Dämpfung evaneszenter Stördruckwellen über einer welligen Wand für  $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1^-$  exponentiell ab und führt daher zu einer signifikanten Zunahme der Stördruckamplitude  $|\tilde{c}_{p0,\nu}|$ . Die im Mittel geringere Geschwindigkeit im Grenzschichtbereich korreliert hingegen mit einer höheren Dämpfung und wirkt daher diesem Trend entgegen. Dadurch nimmt der Beitrag der entsprechenden Teillösung zum Gesamtenergietransfer zwischen Strömung und Struktur deutlich ab.
- 2) Die Interaktion einer subsonischen Grenzschicht mit einer angrenzenden supersonischen Anströmung ist für  $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1^+$  durch einen ausgeprägten Unterschallcharakter der Stördruckverteilung  $\tilde{c}_{p0,\nu}$  gekennzeichnet. Neben der starken Dämpfung evaneszenter Wellen im Grenzschichtbereich lässt sich dies durch die Druckkontinuität am Grenzschichtrand erklären. Demnach strebt die Schwingungsamplitude des Grenzschichtrandes gegen Null ( $|\tilde{w}_{1,\nu}| \rightarrow 0$ ), wodurch die äußere Fluidschicht eine nahezu ebene Fläche überströmt und der Unterschallcharakter auf der eigentlichen Wand  $\tilde{w}_{0,\nu}$  erhalten bleibt.
- 3) In einer rein supersonischen Strömung nimmt der Anteil der am Grenzschichtrand reflektierten Stördrücke deutlich ab, wodurch Interferenzeffekte mit den am Grenzschicht-

rand reflektierten Wellenanteilen immer weniger ins Gewicht fallen und die Grenzschicht in Bezug auf den Energietransfer zunehmend an Bedeutung verliert.

Über einen Vergleich der analytischen Lösungen mit numerischen Lösungen der Euler- und RANS-Gleichungen ließen sich die oben aufgeführten Mechanismen validieren. Darüber hinaus konnten aus einer Analyse der Einflussfunktion  $R_{0,\nu}$ , die das Verhältnis der komplexen Stördruckamplitude in einer grenzschichtbehafteten und grenzschichtfreien Strömung beschreibt, die folgende Aussagen abgeleitet werden:

4)  $|R_{0,\nu}|$  und  $\varphi_{R_{0,\nu}}$  werden für moderate Grenzschichtdicken qualitativ bereits durch die Annahme einer räumlich gemittelten Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht richtig wiedergegeben. Darüber hinaus lässt sich insbesondere für schallnahe Strömungen ( $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1$ ) die quantitative Übereinstimmung mit den numerischen Referenzergebnissen verbessern, indem im Grenzschichtbereich ein realistischeres Geschwindigkeitsprofil vorgegeben wird.

5) Für  $\underline{M}_{\infty,\nu} \rightarrow 1$  gewinnt der Einfluss sekundärer Grenzschichteffekte an Bedeutung. Hierzu zählen etwa die Viskosität des Fluids oder die in Strömungsrichtung zunehmende Grenzschichtdicke.

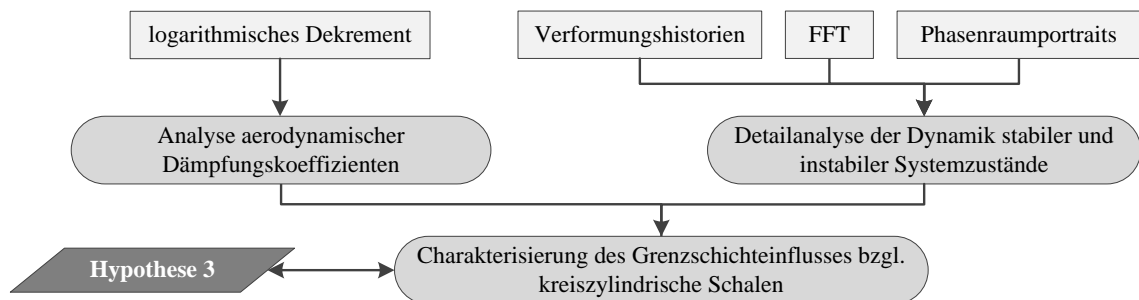
Abschließend wurden mithilfe der numerischen Lösungsansätze die Einflüsse dynamischer Nichtlinearitäten und geometrischer Randbedingungen analysiert und die folgenden Erkenntnisse gewonnen:

7) Bis zu einer normierten Anregungsamplitude von  $\bar{q}_1/L \approx 5 \cdot 10^{-4}$  kann das Antwortverhalten zwei- und dreidimensionaler Strömungsfelder als dynamisch linear angesehen werden. Das Einsetzen dynamischer Nichtlinearitäten ist primär auf einen stromauf wandernden Verdichtungsstoß zurückzuführen.

8) Die lokale Begrenzung der Anregungsformen  $\psi(\xi, \eta)$  reduziert deutlich den nominellen Energietransfer zwischen Strömung und Struktur.

Insbesondere die Resultate 1 bis 3 weisen nach, dass die Ausbreitungscharakteristik der bewegungsinduzierten Störungen durch die lokal variierenden Strömungsgeschwindigkeiten über der Schale maßgeblich den dämpfenden Charakter der Grenzschicht verantwortet. Dies bestätigt die zweite Leithypothese der vorliegenden Arbeit.

## 7 Analyse der aeroelastischen Stabilität zylindrischer Schalen



**Abbildung 7.1:** Übersicht zur Betrachtungsebene 3.

In den vorangegangenen Untersuchungen wurde der Einfluss turbulenter Grenzschichten auf die aeroelastischen Eigenschaften ebener Schalen analysiert. Im Fall der eingangs erläuterten Trägersysteme, z.B. der Ariane V, besteht zudem die Gefahr globaler Instabilitäten ganzer Stufen- oder Nutzlastverkleidungen. Jene sind als zylindrische Schalen zu betrachten, wodurch mit der Krümmung ein Einflussparameter hinzukommt, der die Komplexität des aeroelastischen Gesamtsystems deutlich erhöht. Da solche Strukturbauteile im Raumtransport jedoch von hoher Praxisrelevanz sind, sei abschließend untersucht, inwieweit sich die bisher gewonnen Erkenntnisse über ebene Schalen auch auf zylindrische Strukturen übertragen lassen. Hierzu seien exemplarisch Kreiszyinderschalen betrachtet, deren Aufbau sich mit einem Längen-Radien-Verhältnis von  $L/R = 2$  primär an experimentellen Vergleichsdaten orientiert und zugleich in die Größenordnung typischer Trägersysteme fällt ( $L/R \approx 1$  für die Stufenverkleidung der Ariane V [24]).

Das Ziel des aktuellen Kapitels ist die Bewertung der dritten Leithypothese dieser Arbeit, wodurch die Übertragbarkeit der stabilisierenden Eigenschaften schallnaher Grenzschichtströmungen auf zylindrische Strukturen in den Fokus gesetzt wird (vgl. Abschnitt 1.3). In Anbetracht der damit einhergehenden Komplexität dieser Fragestellung beschränken sich die folgenden Untersuchungen auf eine gezielte Auswahl weniger Kontrollparameter, um die grundlegenden dynamischen Eigenschaften axial umströmter Kreiszyinderschalen empirisch charakterisieren zu können und darauf aufbauend erste Erkenntnisse über den Einfluss turbulenter Grenzschichten abzuleiten.

Aufbauend auf einer Zusammenfassung bisheriger Publikationen zu diesem Thema in Abschnitt 7.1 wird in Abschnitt 7.2 zunächst die aerodynamische Dämpfung reibungsfreier und viskoser Strömungen über das Abklingverhalten ausgewählter Eigenschwingungsformen ermittelt, nachdem diese unterhalb der Stabilitätsgrenze in ihrer Ruhelage gestört werden. In Abschnitt 7.3 wird anschließend mithilfe frequenzbasierter Amplitudenspektren und modaler Phasenraumportraits die Dynamik des aeroelastischen Systems im instabilen Zustandsbereich analysiert und in Bezug auf den Grenzschichteinfluss ausgewertet.



*Bemerkung 7.1:* Zwar wird im aktuellen Kapitel eine zu Kapitel 5 identische Methodik zur Charakterisierung der Systemdynamik angestrebt, d.h. zunächst die Bestimmung der aeroelastischen Stabilitätsgrenzen und anschließend eine Untersuchung der instabilen Systemzustände, jedoch stellt sich die exakte Bestimmung der Stabilitätsgrenzen aufgrund sehr kleiner (positiver und negativer) Systemdämpfungen in deren unmittelbaren Umgebung als äußerst rechenintensiv heraus. Alternativ bietet sich in diesem Kontext eine Abschätzung derselbigen anhand aerodynamischer Dämpfungskoeffizienten im stabilen Zustandsbereich an.

## 7.1 Stand der Wissenschaft

Ähnlich dem wissenschaftlichen Ansatz zur Untersuchung der aeroelastischen Stabilität ebener Schalen basiert eine Vielzahl bisheriger Studien über Kreiszyklinderschalen auf einem Vergleich theoretischer Ansätze mit experimentellen Ergebnissen aus Windkanalversuchen. Die ersten Messkampagnen datieren auf 1962 und befassen sich mit der aeroelastischen Stabilität dünnwandiger Kupferschalen, die im NASA Ames  $8 \times 7$  ft Windkanal einer supersonischen axialen Umströmung ( $2,5 \leq M_\infty \leq 3,5$ ) ausgesetzt sind [10, 125]. Nachdem in diesen Experimenten dynamische Instabilitäten identifiziert wurden, liegt ein Schwerpunkt experimenteller Folgeuntersuchungen von Olson [126] auf der gezielten Variation positiver Membranlasten  $R_x$  und vorgegebener Druckdifferenzen  $\Delta p^{\text{stat}}$  zwischen der Schalenober- und Unterseite. Dabei zeigt sich, dass die nichtlineare Interaktion zwischen statischen und dynamischen Instabilitäten äußerst komplex ist [126]. In Hinblick auf die Fragestellung dieser Arbeit seien daher lediglich die statisch unbelasteten Fälle  $R_x = 0$  und  $\Delta p^{\text{stat}} = 0$  näher betrachtet. Für eine komplette Übersicht der experimentellen Ergebnisse sei in diesem Zusammenhang auf Olson und Fung [26] verwiesen.

Zunächst konzentrierten sich die experimentellen Untersuchungen auf die aeroelastischen Eigenschaften zylindrischen Schalen mit einem Längen-zu-Radien-Verhältnis von  $L/R = 2$  und einem Radien-zu-Dicken-Verhältnis von  $R/h = 2000$  [126]. Hierbei wurden dynamische Instabilitäten in Form von wandernden Umfangswellen, mit Wellenzahlen in der Größenordnung  $s_\theta \approx 20$  und einer stehenden Halbwelle in axialer Richtung ( $s_x = 1$ ) beobachtet [126]. Auf Grundlage theoretischer Analysen von Evensen [127] vermuten Olsen und Fung [26], dass die Umfangswellen durch geometrische Nichtlinearitäten der Struktur angeregt werden. Die Schwingungen werden als gutmütig und ohne Gefahr für die strukturelle Integrität beschrieben [26].

In den Jahren 1964 bis 1966 wurden weitere experimentelle Untersuchungen vergleichbarer Kreiszyklinderschalen mit Radien-zu-Dicken-Verhältnissen von  $R/h = 2000$  bis 4000 im Bereich niedriger supersonischer Machzahlen ( $1,2 \leq M_\infty \leq 1,5$ ) durchgeführt [128, 129]. Diese zeigen, dass der kritische dynamische Druck  $\lambda_{\text{krit}}$  im niedrigen Machzahlbereich etwa auf den dreifachen Wert desjenigen im hohen Machzahlbereich angestiegen ist. Jedoch weisen die dabei beobachteten Schwingungen einen stark divergenten Charakter auf und führten in der Messkampagne zu einem Versagen aller Testobjekte. Dennoch geben Hochgeschwindigkeitsaufnahmen einen Einblick in den zugrundeliegenden Flattermechanismus. So bilden sich im Bereich der Vorderkante lokale Störungen in Form kleiner Beulen oder Wellen aus (abhängig von der Schalendicke  $h$ ), die anschließend mit zunehmender Amplitude stromab bis zur Hinterkante wandern und dort die bereits im hohen Machzahlbereich beobachteten Umfangswellen anregen [128]. Die Studien zielen darüber hinaus darauf ab, den Einfluss von Strömungsgrenzschichten auf die aeroelastische Stabilität systematisch



zu charakterisieren. Leider kommt eine experimentelle Einrichtung zur Beeinflussung der Grenzschichtdicke aufgrund des zerstörenden Charakters der Instabilitäten nicht zum Einsatz. Dennoch mutmaßen Horn et al. [129] mithilfe theoretischer Untersuchungen, dass die Grenzschicht in der Modellierung des Strömungsfeldes berücksichtigt werden muss.

Auf Grundlage numerischer Untersuchungen bestätigt Anderson [130] die Aussage von Horn et al. [129], indem der Autor die Donnell'sche Schalentheorie [131] mit der linearisierten Potentialgleichung koppelt und im wandnahen Bereich eine konstante subsonische Geschwindigkeit zur Approximation der Grenzschicht vorgibt (vergleichbar mit dem in Abschnitt 6.2.1 vorgestellten Grenzschichtmodell für  $N = 1$ ). Daraus schlussfolgert der Autor, dass ein solches Grenzschichtmodell entscheidend für eine quantitative Vorhersage der aeroelastischen Eigenschaften von Kreiszyinderschalen ist, sofern sich die dynamischen Instabilitäten durch Eigenschwingungsformen mit hohen Umfangswellenzahlen charakterisieren lassen [130]. Dem widersprechen Olson et al. [87, 132], indem sie ein der *shear-flow*-Theorie ähnliches Strömungsmodell mit einer Geschwindigkeitsverteilung nach dem  $1/7$ -Potenzgesetz anwenden. Die Autoren stellen in diesem Zusammenhang heraus, dass die Berechnung der instationären Luftkräfte über die *Piston*-Theorie häufig zu einer besseren Übereinstimmung zwischen experimentell und numerisch bestimmten Stabilitätsgrenzen führt als die oben genannten Modellansätze [132]. Als mögliche Erklärung dafür argumentieren die Autoren, dass die Querstromkomponenten, die durch Ausgleichsströmungen zwischen Wellenbergen und -tälern bei hohen Umfangswellenzahlen induziert werden, von der linearisierten Potentialgleichung überschätzt werden, während die zweidimensionale Formulierung der *Piston*-Theorie diese gänzlich vernachlässigt. Da die Querstromkomponenten ebenfalls Reibungseinflüssen der Schalenoberfläche unterliegen, vermag letztgenannte Theorie die lokale Geschwindigkeitsverteilung in einer realen Grenzschicht besser wiedergeben [132]. Diese Ergebnisse ermutigten in den Folgejahren viele Autoren, die aeroelastischen Eigenschaften von Kreiszyinderschalen mithilfe der *Piston*-Theorie zu analysieren, wodurch sich der Fokus auf den Einfluss strukturdynamischer Aspekte, wie Fertigungsungenauigkeiten der Schalendicke oder die eingangs erwähnte Interaktion zwischen statischen und dynamischen Instabilitäten, verschiebt. Für zusammenfassende Erläuterungen jener Studien sei auf Amabili und Pellicano [133] oder die aktuelleren Publikationen von Sabri und Lakis [134] verwiesen.

Bis dato ist jedoch der umstrittene Einfluss reibungsbehafteter Strömungen auf die aeroelastische Stabilität von Kreiszyinderschalen nicht ausreichend untersucht, weshalb die Wahl eines geeigneten aerodynamischen Modells in der Fachliteratur stets auf vagen Annahmen des zugrundeliegenden physikalischen Mechanismus basiert. Nach dem Wissen des Autors der vorliegenden Arbeit existieren derzeit keine Publikationen, die mithilfe moderner Lösungsansätze, etwa der CFD, die experimentellen Ergebnisse von Olsen et al. [26] numerisch untermauern oder gezielt den Einfluss der turbulenten Grenzschicht analysieren.

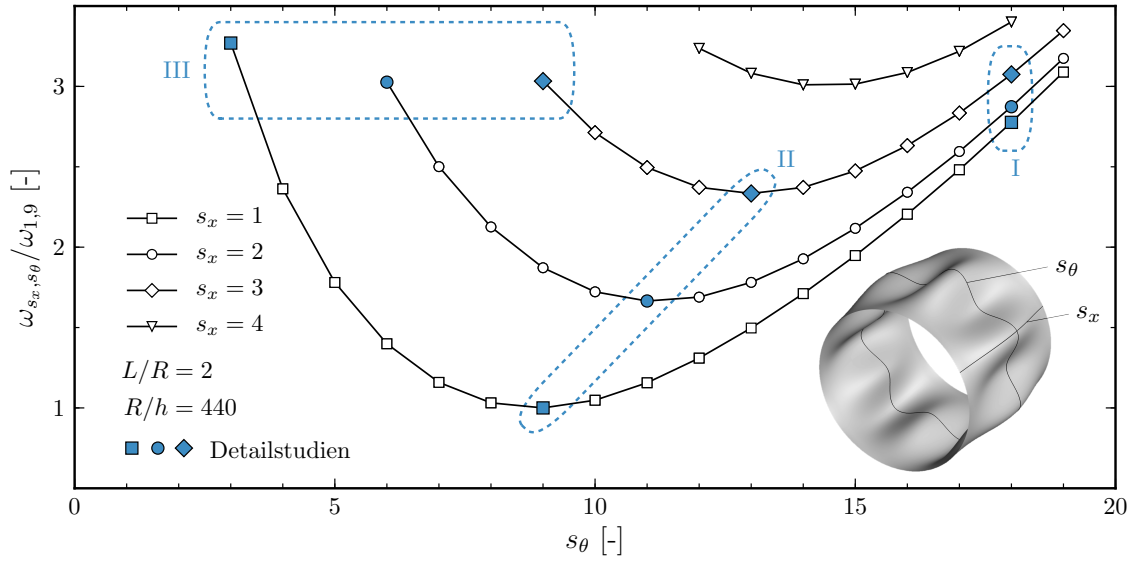


Abbildung 7.2: Normierte Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{s_x, s_\theta}$  der Kreiszylinderschale.

## 7.2 Analyse der aerodynamischen Dämpfung im stabilen Zustandsbereich

Zunächst sei von der Annahme ausgegangen, dass die aerodynamische Kopplung der Eigenschwingungsformen  $\psi$  unterhalb der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  vernachlässigbar klein ist. Somit muss, sofern geometrische Nichtlinearitäten und Dämpfungseigenschaften der Struktur vernachlässigt werden, eine kleine Störung einer diskreten Eigenschwingungsform  $\psi$  zu einer harmonisch abklingenden Schwingung führen, d.h. die Struktur überträgt die aufgeprägte Energie an das Strömungsfeld. Dieser dämpfende Mechanismus lässt sich über das logarithmische Dekrement quantifizieren:

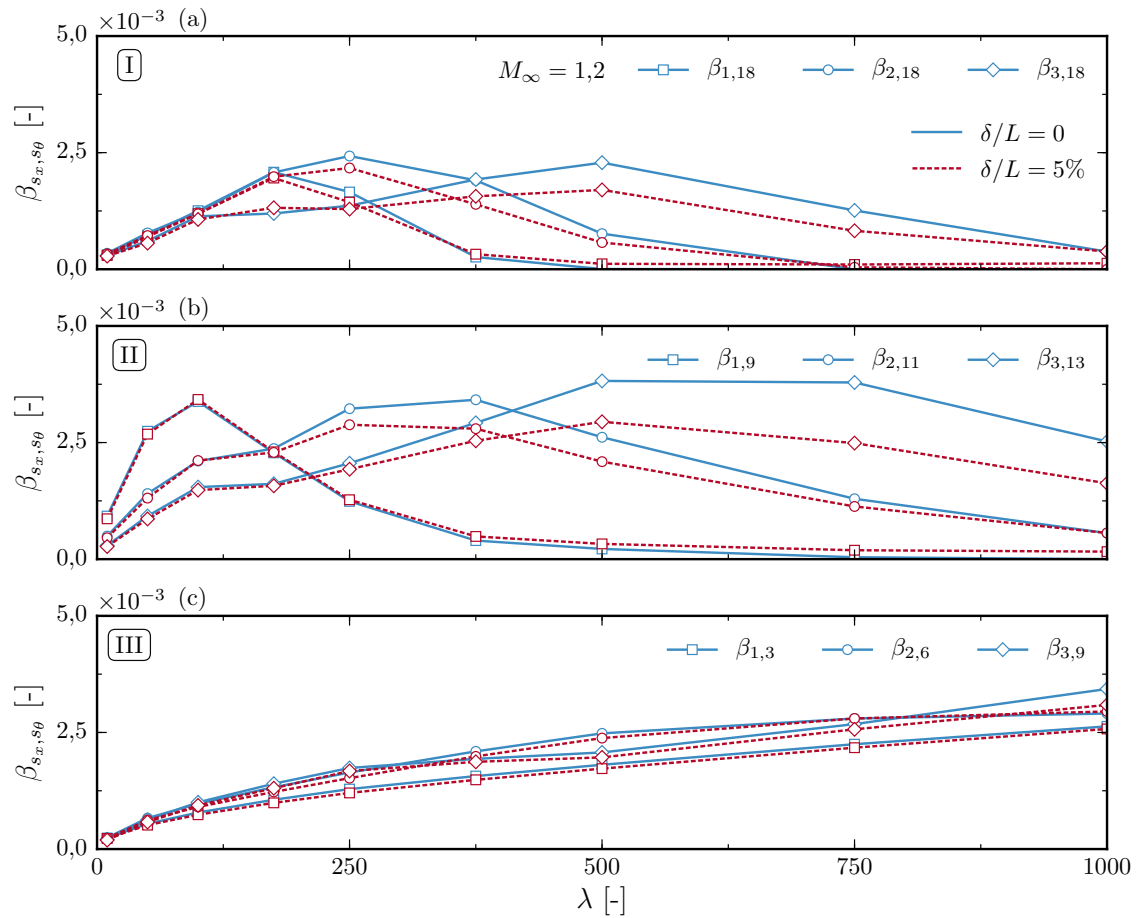
$$\Lambda = \ln \frac{\hat{w}_n}{\hat{w}_{n+1}}, \quad (7.1)$$

wobei  $\hat{w}_n$  und  $\hat{w}_{n+1}$  zwei zeitlich benachbarte Schwingungsamplituden eines Punktes auf der Zylinderoberfläche beschreiben. Nach einer Mittelung über mindestens neun Schwingungsperioden, um den Einfluss etwaiger (numerischer oder physikalischer) Störungen zu eliminieren, kann die aerodynamische Dämpfung schließlich über die Abklingkonstante  $\beta$  ausgedrückt werden:

$$\beta = \sqrt{\frac{\Lambda^2}{4\pi^2 + \Lambda^2}} \approx \frac{\Lambda}{2\pi}. \quad (7.2)$$

Positive Werte für  $\beta$  weisen auf eine abklingende Schwingung und somit eine positive Dämpfung des Strömungsfeldes hin, da die Lösungskurve im Zeitbereich proportional zu der einhüllenden Exponentialfunktion  $e^{-\beta t}$  ist. Im Bereich der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  verliert dieser Ansatz aufgrund der zunehmenden aerodynamischen Kopplung verschiedener Eigenformen  $\psi$  seine Gültigkeit.

Für die systematische Analyse der Dämpfungseigenschaften werden neun verschiedene Eigenschwingungsformen  $\psi_{s_x, s_\theta}(\xi, \theta)$  ausgewählt, die sich aus unterschiedlichen Kombination axialer Halbwellen  $s_x$  und Umfangswellenzahlen  $s_\theta$  zusammensetzen. Abbildung 7.2 fasst diese wiederum in drei Gruppen zusammen. Die Eigenschwingungsformen der Gruppe I

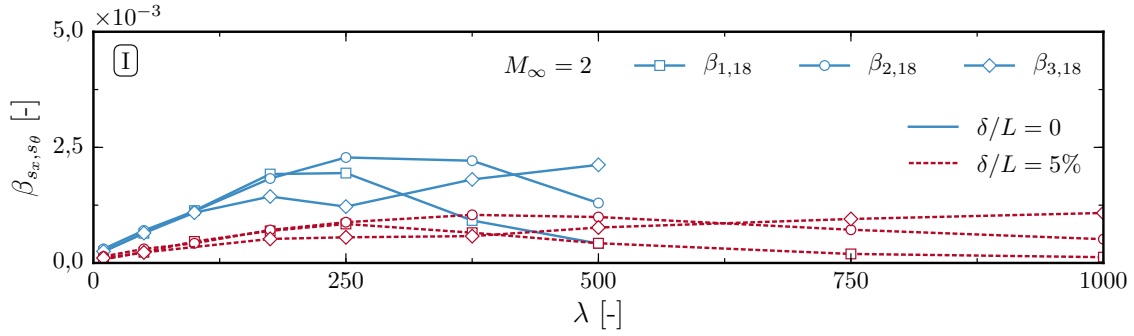


**Abbildung 7.3:** Aerodynamische Dämpfung ausgewählter Eigenschwingungsformen bei  $M_\infty = 1,2$ .

lassen sich durch eine große Umfangswellenzahl  $s_\theta = 18$  charakterisieren. Gruppe II beinhaltet für jede axiale Halbwellenzahl  $s_x$  die Eigenform mit der geringsten Eigenkreisfrequenz  $\omega_{s_x, s_\theta}$  und Gruppe III repräsentiert Eigenformen mit kleinen Umfangswellenzahlen  $s_\theta$ .

Die folgenden Untersuchungen werden für zwei verschiedene Machzahlen durchgeführt:  $M_\infty = 1,2$  und 2. Zunächst zeigt Abbildung 7.3 für  $M_\infty = 1,2$  einen Vergleich der Dämpfungskoeffizienten  $\beta$  in Abhängigkeit des aerodynamischen Drucks  $\lambda$ . Gruppe I und II zeigen eine Zunahme der aerodynamischen Dämpfung auf einen Maximalwert, gefolgt von einer anschließenden Abnahme der Dämpfung, bis diese tangential gegen  $\beta \rightarrow 0$  strebt. Mit zunehmendem  $s_x$  verschiebt sich dieses Maximum in Richtung höherer dynamischer Drücke  $\lambda$ . Die Ergebnisse der Gruppe III lassen keinen Maximalwert erkennen, da unabhängig von der angeregten Eigenschwingungsform  $\psi_{s_x, s_\theta}$  ab  $\lambda \approx 10^3$  höher-harmonische Anteile in den Lösungen die Bestimmung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  verhindern.

Als nächstes seien die Untersuchungen für ein reibungsbehaftetes Strömungsfeld mit einer Grenzschichtdicke von  $\delta/L = 5\%$  wiederholt. Dabei zeigt sich, dass die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht nicht zu einer Erhöhung der aerodynamischen Dämpfung führt, wie Dowell für eine vergleichbare Analyse ebener Schalen mit der *shear-flow*-Theorie nachweist [11], sondern überwiegend der entgegengesetzte Fall eintritt. Zwar ist die Abnahme



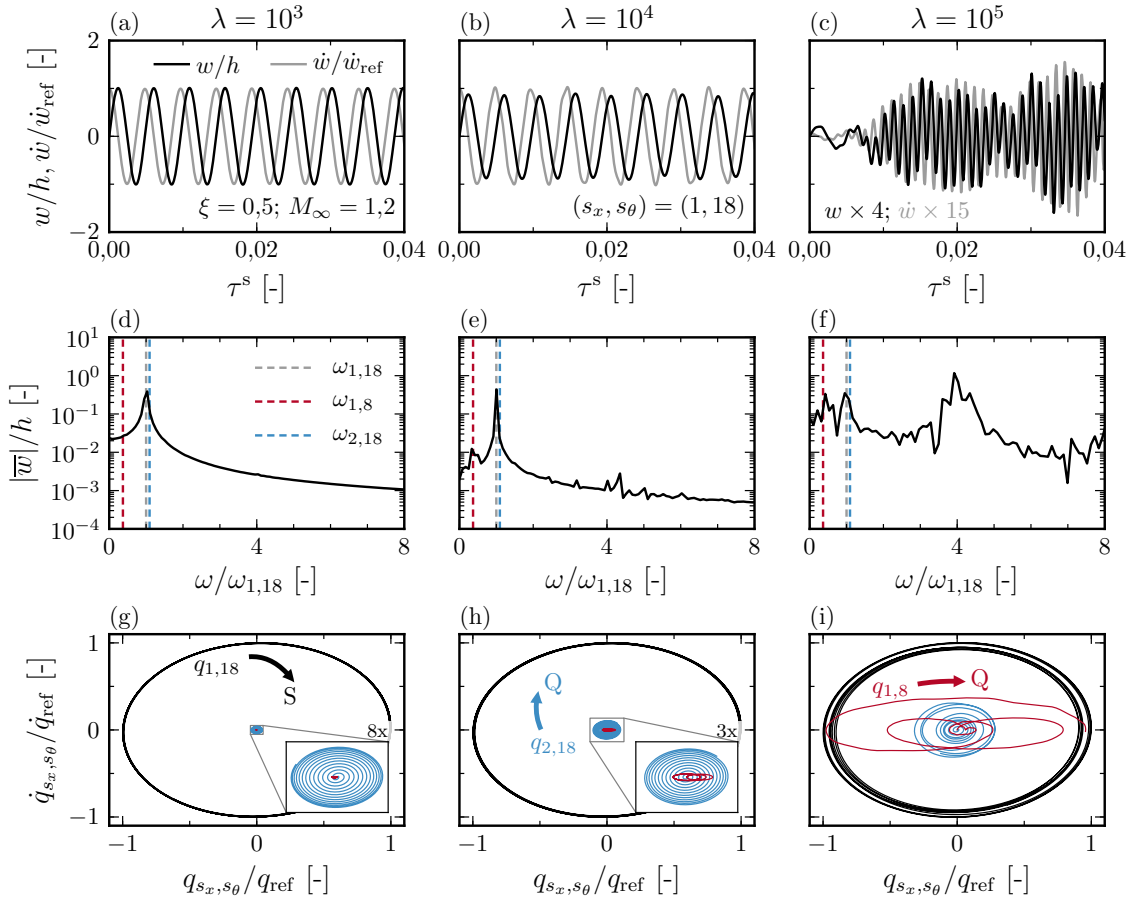
**Abbildung 7.4:** Aerodynamische Dämpfung ausgewählter Eigenschwingungsformen bei  $M_\infty = 2$ .

der Dämpfung  $\beta$  nicht sonderlich ausgeprägt, dennoch lässt sie sich insbesondere für die Kombination hoher Umfangswellenzahlen  $s_\theta$  und axialer Halbwellen  $s_x$  nachweisen.

Für  $M_\infty = 2$  sei der Fokus auf Gruppe I gelegt, da diese alle wesentlichen Merkmale der bisher diskutierten Lösungen repräsentiert und in der Literatur die Eigenschwingungsformen mit hohen Umfangswellenzahlen  $s_\theta$  als am kritischsten bezüglich etwaiger Instabilitäten identifiziert wurden [126, 128, 129]. In diesem Zusammenhang zeigt Abbildung 7.4 zunächst die Dämpfungskoeffizienten  $\beta$  der reibungsfreien Systeme. Die Lösungskurven weisen zwar einen vergleichbaren Verlauf wie im schallnahen Geschwindigkeitsbereich auf ( $M_\infty = 1,2$ ), jedoch lässt sich das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  aufgrund des deutlich früheren Einsetzens höher-harmonischer Anteile bereits für  $\lambda > 500$  nicht mehr eindeutig bestimmen. Dies deutet darauf hin, dass die Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  wegen der Erhöhung der Machzahl  $M_\infty$  abgenommen hat und bestätigt somit die Beobachtungen aus den Experimenten von Stearman [128] (vgl. Abschnitt 7.1).

Eine Gegenüberstellung dieser Ergebnisse mit Lösungen auf Grundlage reibungsbehafteter Strömungsfelder offenbart, dass die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht wieder zu einer Abnahme der aerodynamischen Dämpfung  $\beta$  führt. Dieser Effekt ist im hohen Überschall ( $M_\infty = 2$ ) deutlich ausgeprägter als im niedrigen Überschall ( $M_\infty = 1,2$ ). Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass die Bestimmung des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  im Vergleich zu den reibungsfreien Systemen noch bei deutlich höheren dynamischen Drücken  $\lambda$  möglich ist. Dies ist ein interessantes Ergebnis, zeigt es doch, dass, obwohl kleine Störungen der entsprechenden Eigenschwingungsformen  $\psi_{s_x, s_\theta}(\xi, \theta)$  zunächst schwächer gedämpft werden, das Einsetzen dynamischer Instabilitäten durch die Präsenz einer Grenzschicht unterdrückt oder deutlich hinausgezögert wird.

An dieser Stelle kann nicht ausgeschlossen werden, dass höher-harmonische Schwingungsanteile bereits bei niedrigeren dynamischen Drücken  $\lambda$  angefacht werden. Die Verläufe der Dämpfungskurven  $\beta(\lambda)$  verdeutlichen zudem ein aus den Lösungen im Zeitbereich resultierendes Problem: da die graduellen Änderungen der Dämpfungskoeffizienten  $\partial\beta/\partial\lambda$  im Bereich der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  sehr klein sind, ist anhand der begrenzten Lösungszeiten schwer festzustellen, ob sich die weitgehend indifferenten Schwingung (vgl. Abschnitt 7.3) nach längerer Zeit als eine dynamische Instabilität herauskristallisieren. Hinsichtlich der verfügbaren Rechenressourcen gerät daher der Lösungsansatz im Zeitbereich bei der Bestimmung aeroelastischer Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  an seine Grenzen.



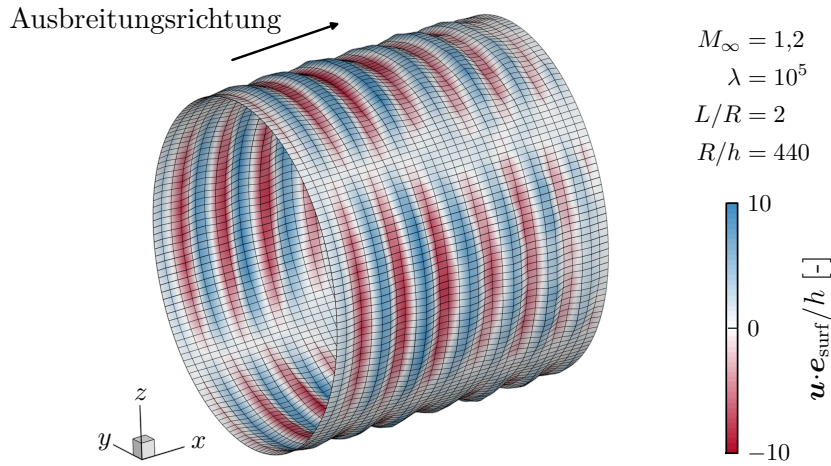
**Abbildung 7.5:** Systemdynamik bei  $M_\infty = 1,2$  für  $\lambda = 10^3$  (links),  $10^4$  (mittig) und  $10^5$  (rechts), normiert auf  $\dot{w}_{\text{ref}} = \dot{w}|_{\tau=0}$  und  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_{1,18})|_{\lambda=0}$ .

### 7.3 Detailanalyse der Systemdynamik im instabilen Zustandsbereich

Aus Abschnitt 7.2 leitet sich die Frage ab, welcher Natur die Störungen sind, die ab einem gewissen dynamischen Druck  $\lambda$  die Bestimmung des logarithmischen Dekrementes  $\Lambda$  verhindern. Darüber hinaus sind die dynamischen Eigenschaften des aeroelastischen Systems im instabilen Zustandsbereich von Interesse. Für eine detaillierte Betrachtung ausgewählter Schwingungszustände wird die Eigenschwingungsform  $\psi_{s_x, s_\theta}$  mit  $(s_x, s_\theta) = (1, 18)$  durch eine geeignete Anfangsbedingung in ihrer Ruhelage gestört und für verschiedene dynamische Drücke  $\lambda$  die resultierende Systemantwort bei  $M_\infty = 1,2$  und 2 bestimmt.

#### 7.3.1 Dynamik reibungsfreier Systeme

Die Abbildungen 7.5(a) bis (c) zeigen für  $M_\infty = 1,2$  die Zeithistorien der wandnormalen Verschiebung  $w(\xi, \theta, \tau)$  eines Punktes auf der Zylinderoberfläche bei  $\xi = 0,5$  und  $\theta = 0$ . Entspricht die Lösung für  $\lambda = 10^3$  noch einer einfach-harmonischen Schwingung, so lassen sich nach einer Erhöhung des dynamischen Drucks auf  $\lambda = 10^4$  bereits höherharmonische Lösungsanteile nachweisen. Dies bestätigen die frequenzbasierten Amplitudenspektren  $|\bar{w}|(\omega)$  in den Abbildungen 7.5(d) und (e). Hierbei deutet sich ein kleinerer

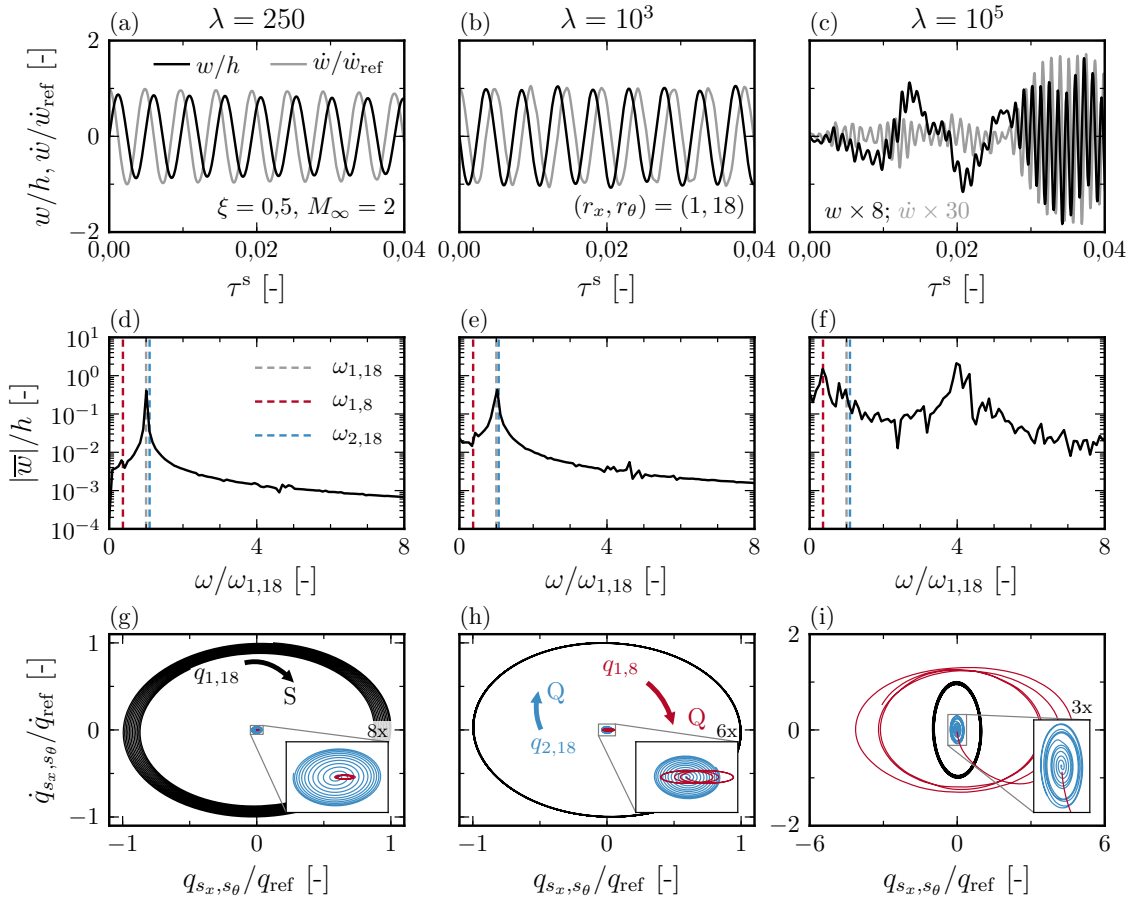


**Abbildung 7.6:** Stromab wandernde Biegewellen des aeroelastisch instabilen Kreiszyllinders bei  $M_\infty = 1,2$ .

Peak unterhalb der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{1,18}$  sowie eine breitbandige Energieverteilung im Bereich  $\omega/\omega_{1,18} \approx 4$  an. Eine weitere Erhöhung des dynamischen Drucks auf  $\lambda = 10^5$  resultiert schließlich in eine hochfrequente Schwingung (vgl. Abbildung 7.5(c)) kurz nach dem Aufprägen der initialen Störung. Das dazugehörige Amplitudenspektrum in Abbildung 7.5(f) zeigt eine breitbandige Energieverteilung, dessen Maximum bei  $\omega/\omega_{1,18} \approx 4$  zu finden ist. Um den Mechanismus des Einsetzens dieser dynamisch instabilen Schwingungsform besser zu verstehen, sei die Strukturverformung in ihre modalen Bestandteile zerlegt und die Trajektorien der modalen Freiheitsgrade  $(s_x, s_\theta) = (1, 18)$ ,  $(2, 18)$  und  $(1, 8)$  über die Darstellung der generalisierten Koordinaten  $q_{s_x, s_\theta}$  im Phasenraum analysiert. Aus den Abbildungen 7.5(g) bis (i) geht hierbei zunächst hervor, dass die angeregte Störung der Eigenschwingungsform  $\psi_{1,18}$  nur äußerst schwach mit der Strömung interagiert und, wie der Dämpfungskoeffizient  $\beta_{1,18}$  in Abschnitt 7.2 bereits andeutet, einer geringen Dämpfung unterliegt (in Abbildung 7.5(g) als Senke „S“ gekennzeichnet). Zeitgleich ist bereits für  $\lambda = 10^3$  ein Aufschwingen höherer modaler Freiheitsgrade erkennbar. Dies zeigt sich zunächst anhand der Trajektorie des Freiheitsgrades  $(s_x, s_\theta) = (2, 18)$ , bevor mit ansteigendem dynamischen Druck  $\lambda$  zahlreiche weitere modale Freiheitsgrade (nicht in Abbildung 7.5 dargestellt) angefacht werden, von denen insbesondere  $(s_x, s_\theta) = (1, 8)$  dominiert (in Abbildungen 7.5(h) und (i) als Quelle „Q“ gekennzeichnet). Dessen niedrige Eigenkreisfrequenz erklärt die Zunahme der tieffrequenten Anteile des Amplitudenspektrums  $|\bar{w}|(\omega)$  in den Abbildungen 7.5(e) und (f).

Eine Analyse der Oberflächenverformung offenbart, dass sich dieses Ergebnis durch die Anregung kurzweiliger Biegeverformungen der Kreiszyllinderschale erklären lässt, die sich an der Vorderkante ausbilden und stromab bis zur Hinterkante des Zylinders ausbreiten (vgl. Abbildung 7.6). Diese Instabilität in Form einer stromab wandernden Welle entspricht den experimentellen Beobachtungen von Olson [126] (vgl. Abschnitt 7.1), wenngleich in den numerischen Lösungen keine wandernden Umfangswellen angeregt werden. Vermutlich ist dies, wie Olsen und Fung [26] argumentieren, auf die Vernachlässigung geometrischer Nichtlinearitäten der Struktur zurückzuführen.





**Abbildung 7.7:** Systemdynamik bei  $M_\infty = 2$  für  $\lambda = 250$  (links),  $10^3$  (mittig) und  $10^5$  (rechts), normiert auf  $\dot{w}_{\text{ref}} = \dot{w}|_{\tau=0}$  und  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_{1,18})|_{\lambda=0}$ .

*Bemerkung 7.2:* In diesem Zusammenhang sei auf eine kritische Betrachtung der in Abbildung 7.5(c) angedeuteten Grenzzyklosschwingung hingewiesen. Nach einem kurzen Einschwingvorgang wachsen die Schwingungsamplituden aufgrund der strukturdynamisch linearen Formulierung signifikant an. Da hierbei lediglich der Einschwingvorgang von Interesse ist, wurde die Netzkonvergenz des diskretisierten Strömungs- und Strukturfeldes nach dem in Abschnitt 4.4 vorgestellten Verfahren von Roache [82] lediglich für moderate Schwingungsamplituden sichergestellt. Etwaige nichtlineare Grenzzyklosschwingungen würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen und sind daher Gegenstand zukünftiger Forschungen (vgl. Abschnitt 8.2).

Um den Einfluss der Machzahl  $M_\infty$  besser zu verstehen, sei für  $M_\infty = 2$  ein instabiler Systemzustand nach identischer Vorgehensweise analysiert. Abbildung 7.7 verdeutlicht hierbei, dass die dynamischen Eigenschaften qualitativ vergleichbar mit jenen im niedrigen Überschall bei  $M_\infty = 1,2$  sind. Jedoch zeigen sich die höher-harmonischen Schwingungsanteile bereits bei deutlich niedrigeren dynamischen Drücken  $\lambda$  (vgl. Abbildung 7.7(d) für  $\lambda = 250$ ). Hatte die Lösung für  $\lambda = 10^3$  bei  $M_\infty = 1,2$  noch einen einfach-harmonischen Charakter, so sind anhand des Amplitudenspektrums  $|\bar{w}|(\omega)$  für  $M_\infty = 2$  bereits weitere Peaks bei  $\omega/\omega_{1,18} \approx 4$  erkennbar (vgl. Abbildung 7.5(d) und Abbildung 7.7(e)). Eine Betrachtung der modalen Phasenraumportraits in den Abbildungen 7.5(g) bis (i) verdeutlicht, dass der initial angeregte Freiheitsgrad  $(s_x, s_\theta) = (1, 18)$  wieder geringfügig gedämpft

wird. Während zeitgleich die Lösungskurve von  $(s_x, s_\theta) = (2, 18)$  in spiralförmigen Bahnen nach außen verläuft, wird bei einer weiteren Erhöhung des dynamischen Drucks  $\lambda$  insbesondere  $(s_x, s_\theta) = (1, 8)$  angefacht. Die resultierende Schwingungsform lässt sich wie für  $M_\infty = 1,2$  als stromab wandernde Welle charakterisieren. Allerdings deutet ein Vergleich der Abbildungen 7.5(c) und 7.7(c) an, dass diese im hohen Überschall etwas weniger abrupt angefacht wird.

An dieser Stelle sei ein in Abschnitt 7.1 vorgestelltes experimentelles Ergebnis in Erinnerung gerufen: Windkanalexperimente vergleichbarer Systeme haben gezeigt, dass die Stabilitätsgrenzen  $\lambda_{\text{krit}}$  im niedrigen Überschall deutlich über jenen in einer hohen Überschallströmung liegen, die dynamischen Instabilitäten bei hohen Machzahlen  $M_\infty$  jedoch einen eher gutmütigen Charakter aufweisen [126, 128, 129]. Diese Tendenz deutet sich ebenfalls in den numerischen Ergebnissen an, wenngleich nach einem gewissen Einschwingvorgang wieder die im niedrigen Überschall beobachteten hochfrequenten Oszillationen angefacht werden.

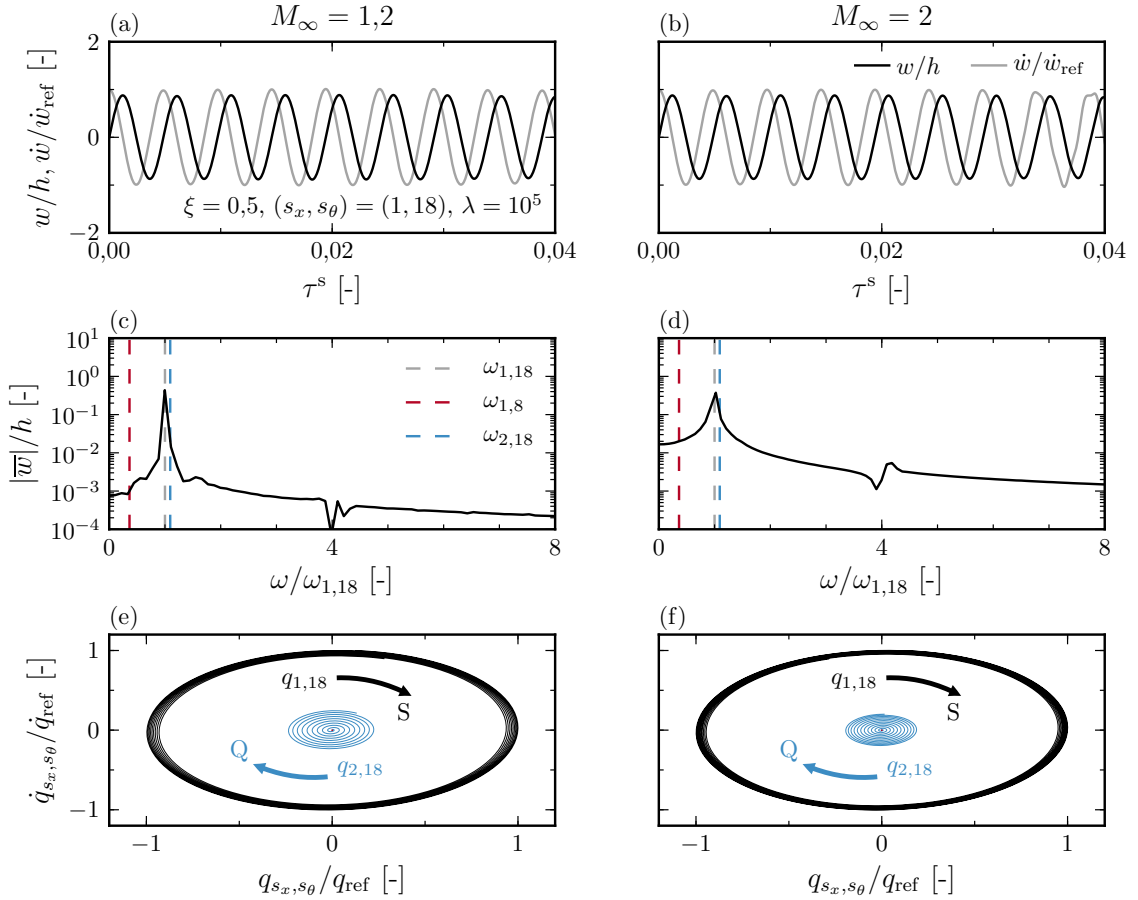
### 7.3.2 Einfluss turbulenter Grenzschichten

Eine Analyse der aerodynamischen Dämpfungskoeffizienten  $\beta$  in Abschnitt 7.2 hat bereits angedeutet, dass das aeroelastische System unter der Präsenz einer turbulenten Grenzschicht noch bei deutlich höheren dynamischen Drücken  $\lambda$  einen harmonischen Charakter aufweist. Ein Vergleich der Systemdynamik in reibungsfreien und reibungsbehafteten Strömungen soll im Folgenden helfen, dieses Phänomen besser zu verstehen. Hierfür sei der dynamische Druck  $\lambda = 10^5$  gewählt, für den bei  $M_\infty = 1,2$  und 2 eine starke Anfachung stromab wandernder Biegewellen beobachtet werden konnte.

Analog zu den vorangegangenen Untersuchungen zeigen Abbildungen 7.8(a) und (b) zunächst die Zeithistorien der wandnormalen Verschiebung  $w(\xi, \theta, \tau)$  eines Punktes auf der Zylinderoberfläche bei  $\xi = 0,5$ . Der sinus-förmige Verlauf der Lösungskurven deutet auf eine einfach-harmonische Schwingung hin. Dennoch weisen die dazugehörigen Amplitudenspektren in den Abbildungen 7.8(c) und (d) höher-harmonische Anteile im Bereich  $\omega/\omega_{1,18} \approx 4$  auf. Der Grund hierfür ist anhand der Phasenraumportraits in den Abbildungen 7.8(e) und (f) erkennbar: obwohl die initial angeregte Eigenschwingungsform  $\psi_{1,18}$  leicht gedämpft wird, kommt es wie bei den reibungsfreien Systemen zu einer Anregung des generalisierten Freiheitsgrades  $(s_x, s_\theta) = (2, 18)$ . Eine Auswertung der zeitabhängigen Oberflächenverformung bestätigt die daraus abgeleitete Vermutung, dass der initialen Anregung wieder stromab wandernde Wellen überlagert sind (qualitativ vergleichbar zu Abbildung 7.6), wenngleich die Ausprägung dieses Effektes durch die Präsenz einer Grenzschicht signifikant reduziert wird.

Interessant ist an dieser Stelle die Analogie zu den phänomenologischen Betrachtungen des Grenzschichteinflusses im Kontext der ebenen Schale (vgl. Kapitel 6). Zwar sind die aeroelastischen Instabilitäten entsprechender Systeme überwiegend durch stehende Wellen charakterisiert. Dennoch hat sich nach einer Aufteilung der Lösung in zwei entgegengesetzt zueinander wandernde Anteile ebenfalls ein anfachender Charakter der stromab wandernden Wellenkomponente nachweisen lassen. Der dämpfende Einfluss einer Grenzschicht, der auf die lokale Reduktion der Strömungsgeschwindigkeit und einer damit einhergehenden Zunahme des Unterschallcharakters der bewegungsinduzierten Stördrücke zurückzuführen ist, deutet sich ebenso in den empirischen Ergebnissen kreiszyklischer Schalen an. Weiterführende Fragestellungen, etwa warum im Fall der Kreiszyklinderschale allein kurzzeitige





**Abbildung 7.8:** Systemdynamik für  $\lambda = 10^5$  bei  $M_\infty = 1,2$  (links) und 2 (rechts), normiert auf  $\dot{w}_{\text{ref}} = \dot{w}|_{\tau=0}$  und  $q_{\text{ref}} = \max(\hat{q}_{1,18})|_{\lambda=0}$ .

stromab wandernde Biegewellen angefacht werden, müssen verstärkt die strukturellen Eigenschaften jener Schalen sowie die zunehmende Komplexität dreidimensionaler Strömungsfelder in den Fokus rücken (vgl. Abschnitt 8.2).

## 7.4 Zusammenfassung in Bezug auf die Zielstellung

In der dritten Betrachtungsebene dieser Arbeit wurden die aeroelastischen Eigenschaften einer axial umströmten Kreiszylinderschale mit einem Längen-zu-Radien-Verhältnis von  $L/R = 2$  für die Machzahlen  $M_\infty = 1,2$  und 2 analysiert. In Bezug auf die in Abschnitt 7.1 vorgestellten Windkanaluntersuchungen ließen sich zunächst die folgenden Beobachtungen numerisch reproduzieren:

- 1) Dynamische Instabilitäten treten primär in Form kurzweiliger stromab wandernder Biegewellen in Erscheinung.
- 2) Das Einsetzen jener Biegewellen bei voneinander stark abweichenden dynamischen Drücken  $\lambda$  deutet an, dass die aeroelastische Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  im niedrigen Überschall ( $M_\infty = 1,2$ ) über jener im hohen Überschall ( $M_\infty = 2$ ) liegt.

Hinsichtlich des Grenzschichteinflusses lassen sich die folgenden Aussagen ableiten:

- 3) Im aeroelastisch stabilen Zustandsbereich ist der Einfluss der turbulenten Grenzschicht gering. Ihre Berücksichtigung führt tendenziell zu einer leichten Reduktion der aerodynamischen Dämpfung. Am deutlichsten tritt dieses Phänomen für Eigenschwingungsformen  $\psi_{s_x, s_\theta}$  mit hohen Umfangswellenzahlen  $s_\theta$  in Erscheinung.
- 4) Die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht schwächt signifikant die Anfachung stromab wandernder Biegewellen und verzögert somit das Einsetzen dynamischer Instabilitäten. Dies lässt indirekt auf eine Zunahme der aeroelastischen Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  schließen. Im hohen Überschall ( $M_\infty = 2$ ) ist dieser Effekt ausgeprägter als im niedrigen Überschall ( $M_\infty = 1,2$ ).

In Bezug auf die dritte Leithypothese lässt sich zusammenfassen, dass die Grenzschicht bei der aeroelastischen Stabilitätsanalyse von Kreiszyinderschalen aufgrund des stabilisierenden Einflusses auf stromab wandernde Biegewellen berücksichtigt werden muss. Die numerischen Studien zeigen in diesem Zusammenhang, dass die Verwendung reibungsfreier Strömungsmodelle im anwendungsorientierten Einsatz tendenziell einer konservativen Strukturauslegung zugutekommt.

Die aeroelastischen Mechanismen der Kreiszyinderschale unterscheiden sich jedoch in einigen Punkten von den bisherigen Analysen ebener Schalen, so etwa durch (1) die Abnahme der Stabilitätsgrenze  $\lambda_{\text{krit}}$  hin zu höheren Machzahlen  $M_\infty$ , (2) die Reduktion der aerodynamischen Dämpfung  $\beta$  reeller Eigenschwingungsformen  $\psi_{s_x, s_\theta}$  durch eine turbulente Grenzschicht oder (3) die Anfachung stromab wandernder Wellen als dominierender Mechanismus aeroelastischer Instabilitäten. Obwohl eine systematische Analyse dieser drei Aspekte über das Ziel der vorliegenden Arbeit hinausgeht, lassen sich aus ihnen dennoch interessante Forschungsfragen ableiten. Jene werden in Abschnitt 8.2 im Rahmen eines Ausblicks auf weiterführende Arbeiten erörtert.

# 8 Zusammenfassung und Ausblick

## 8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wird die Frage erörtert, wie turbulente Grenzschichten die aeroelastischen Eigenschaften dünnwandiger Schalen in schallnahen Strömungen beeinflussen. Im Mittelpunkt der Arbeit steht eine systematische Charakterisierung der Dynamik ebener und zylindrischer Schalen, die allseitig gelenkig gelagert oder fest eingespannt sind und von einer Seite überströmt werden, sowie eine phänomenologische Betrachtung des Energieaustausches zwischen dem Strömungsfeld und der flexiblen Struktur. Motiviert sind diese Untersuchungen durch eine grundlagen- und eine anwendungsorientierte Problemstellung.

Die grundlagenorientierte Problemstellung leitet sich aus einer Vielzahl wissenschaftlicher Studien zu der als „Panelflattern“ bezeichneten Themenstellung ab, die sich überwiegend auf reibungsfreie Strömungen im hohen Überschall beziehen und die strukturdynamischen Einflussfaktoren in den Fokus der Untersuchungen stellen. Der Grenzschichteinfluss in schallnahen Strömungen wird hingegen fast ausschließlich im Kontext empirischer Bestimmungen der aeroelastischen Stabilitätsgrenze berücksichtigt. So konnte in experimentellen Studien der NASA nachgewiesen werden, dass eine zunehmende Grenzschichtdicke mit einem Anstieg der aeroelastischen Stabilitätsgrenze ebener Schalen korreliert. Dennoch mangelt es an einem Verständnis über die zugrundeliegenden phänomenologischen Mechanismen. Zudem wurde die dynamisch nichtlineare Systemantwort nach dem Überschreiten der Stabilitätsgrenze im niedrigen Überschall und der dabei wirkende Grenzschichteinfluss in der Literatur bislang nicht thematisiert.

Die anwendungsorientierte Problemstellung beruht auf einem Einbruch der machzahlabhängigen Stabilitätsgrenze ebener oder leicht gekrümmter Schalen kurz nach dem Überschreiten der Schallgeschwindigkeit. Genau in diesem Bereich sind die Trajektorien konventioneller Raumtransportsysteme (z.B. Saturn V oder Ariane V) durch ein Maximum des dynamischen Drucks und der Reynoldszahl der freien Anströmung gekennzeichnet. Hierdurch nimmt die Grenzschichtdicke über den dünnwandigen Nutzlast- oder Stufenverkleidungen einen Minimalwert an. Aufgrund nichtlinearer Biege-Dehn-Kopplungen ist die Schwingungsamplitude der überwiegend lokal auftretenden dynamischen Instabilitäten zwar begrenzt und führt somit selten zu einem Verlust der strukturellen Integrität. Dennoch können solche Grenzzyklusschwingungen zu Ermüdungsproblemen oder Beschädigungen sekundärer Systeme (z.B. elektrischer Leitungen) führen. Es ist daher von Interesse, den stabilisierenden Einfluss turbulenter Grenzschichten durch den Einsatz moderner CFD-Verfahren in numerischen Stabilitätsanalysen zu berücksichtigen sowie über einen Vergleich mit weniger komplexen Modellgleichungen zu bewerten, unter welchen Randbedingungen sich der Einsatz der rechenintensiven Lösungsverfahren lohnt.

Zur strukturierten Beantwortung der eingangs formulierten Forschungsfrage wurden drei Leithypothesen formuliert, aus denen sich die Unterteilung dieser Arbeit in drei Betrachtungen ableiten lässt.

tungsebenen abgeleitet. Diese bilden zusammen mit einer ausführlichen Verfahrensvalidierung die Kernelemente der vorliegenden Abhandlung, deren jeweilige Zielsetzung und Ergebnisse im Folgenden zusammengefasst seien.

Im Rahmen der Verfahrensentwicklung (Kapitel 4) wurde zunächst der Nachweis erbracht, dass die numerischen Lösungsansätze der strukturdynamischen Modellgleichungen auf Basis der Mindlin'schen Plattentheorie (implementiert in der kommerziellen FEM-Software Nastran) und der von-Kármán'schen Plattengleichung (Lösung über das LSODE-Verfahren) auch für große Verformungen nahezu identische Ergebnisse liefern. Die Lösungen der Kreiszyinderschale zeigen darüber hinaus eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit analytisch und experimentell bestimmten Eigenfrequenzen. Zur Kopplung der Systemgleichungen im Zeitbereich wurden für diese Arbeit zwei Verfahren auf Basis eines seriell gestaffelten partitionierten Kopplungsschemas entwickelt: eine auf TAU-Python basierende starke Kopplung unter Verwendung des Tau-Verfahrens sowie eine in Fortran implementierte schwache Kopplung, die auf einer Lösung der linearisierten Potentialgleichung für das Strömungsfeld und der von-Kármán'schen Plattengleichung für das Strukturfeld basiert. Während über den ersten Ansatz aerodynamisch nichtlineare Phänomene berücksichtigt werden können, ermöglicht letztgenanntes Verfahren deutlich geringere Lösungszeiten. Somit ließen sich über einen Machzahlbereich von  $0,8 \leq M_\infty \leq 2$  die Mechanismen aeroelastisches Beulen, Ein-Freiheitsgrad-Flattern und Mehr-Freiheitsgrad-Flattern numerisch nachweisen und die Lösungen an theoretischen Ergebnissen aus der Literatur validieren; sowohl hinsichtlich aeroelastischer Stabilitätsgrenzen als auch hinsichtlich der Amplituden und Frequenzen von Grenzzyklusschwingungen. Lediglich im Machzahlbereich von  $1,4 \leq M_\infty \leq 1,6$  zeigt die aeroelastische Stabilitätsgrenze erhebliche Abweichungen zu potentialtheoretischen Lösungen von Dowell, welche auf das Einsetzen höher-harmonischer Ein-Freiheitsgrad-Schwingungen zurückgeführt werden können. Ein Vergleich mit Windkanalmessungen der NASA zeigt abschließend, dass die Lösung der RANS-Gleichungen den Grenzschichteinfluss zufriedenstellend wiedergibt. In diesem Kontext ließen sich die numerischen Ergebnisse von Hashimoto verifizieren, bei denen es sich bis zur Veröffentlichung des Autors dieser Arbeit um den einzigen Vergleich zwischen CFD-basierten Lösungsansätzen und experimentellen Daten handelte.

Die erste Betrachtungsebene (Kapitel 5) orientiert sich an der Hypothese, dass die Grenzschicht prinzipiell zu einem Anstieg der aeroelastischen Stabilitätsgrenze führt und nach dem Überschreiten derselbigen einen dämpfenden Einfluss auf die instabilen Systemzustände hat. Mithilfe der oben genannten Lösungsansätze wurde zunächst die aeroelastische Stabilitätsgrenze einer ebenen Schale für den Machzahlbereich  $0,8 \leq M_\infty \leq 2$  ermittelt. Dabei hat sich der niedrige Überschallbereich für weitere Detailstudien als geeignet erwiesen, da hier das Ein-Freiheitsgrad-Flattern als dominierender Mechanismus dynamischer Instabilitäten identifiziert werden konnte und die Präsenz der Grenzschicht zu einem erheblichen Anstieg der aeroelastischen Stabilitätsgrenze geführt hat. Zudem erweist sich die Machzahl  $M_\infty = 1,2$  als kritisch hinsichtlich des Missionsprofils einer konventionellen Trägerrakete. Die Lösungen lassen auf einen linearen Zusammenhang zwischen der Grenzschichtdicke und der aeroelastischen Stabilitätsgrenze schließen. Dass der Einsatz verschiedener Turbulenzmodelle dabei kaum zu Abweichungen in den Ergebnissen führt, deutet an, dass die zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht, die bei der Überströmung ebener Schalen sowohl durch das SA- als auch durch das Menter-SST-Modell nahezu identisch wiedergegeben wird, maßgeblich den dämpfenden Einfluss der Grenzschicht verantwortet. Ausführliche Studien im instabilen Zustandsbereich bestätigen zudem die These, dass die Grenzschicht einen stabilisierenden Einfluss auf die

teils komplexe Dynamik der Grenzzzyklusschwingungen hat. So weisen die Ergebnisse eine signifikante Abnahme der Komplexität nicht-periodischer Attraktoren nach und sollten daher in entsprechenden Analysen berücksichtigt werden. Zugleich wurde beobachtet, dass der Einfluss nichtlinearer Kompressibilitätseffekte auf das aeroelastische Gesamtsystem vernachlässigbar ist. Abschließend führen die Ergebnisse zu der Schlussfolgerung, dass der Einsatz von Modellgleichungen mit einer geringeren Komplexität (z.B. der linearisierten Potentialgleichung) im Kontext aeroelastischer Entwurfsaufgaben einen konservativen Charakter aufweist, d.h. die entsprechenden Strukturelemente überdimensioniert wären.

Die zweite Betrachtungsebene (Kapitel 6) umfasst eine phänomenologische Analyse der instationären (generalisierten) Luftkräfte und der damit verbundenen Mechanismen des Energieaustausches zwischen dem Strömungsfeld und der Struktur. Aus den vorangegangenen Erkenntnissen leitet sich die These ab, dass sich der dämpfende Einfluss der Grenzschicht maßgeblich auf die Reduktion der lokalen Strömungsgeschwindigkeit zurückführen lässt. Um dies nachzuweisen, wurden sämtliche Einflussfaktoren hinsichtlich der Schalen-geometrie und der Turbulenzmodellierung vernachlässigt und das Strömungsfeld auf potentialtheoretischer Basis über eine Sequenz wandparalleler Fluidschichten mit einer jeweils konstanten Geschwindigkeit modelliert. Das aus einer harmonischen Anregung resultierende Stördruckfeld ließ sich somit in eine stromauf und eine stromab wandernde Wellenkomponente zerlegen und auf diese Weise der Energietransfer von der Strömung in die anregende Schwingungsform im niedrigen Überschallbereich analytisch nachweisen. Diesem für das Ein-Freiheitsgrad-Flattern verantwortlichen Mechanismus wirkt die Grenzschicht entgegen, da sich die bewegungsinduzierten Störungen aufgrund der reduzierten Strömungsgeschwindigkeiten mit einem zunehmend subsonischen Charakter ausbreiten. Zudem hat sich gezeigt, dass die Verformungsamplitude des Grenzschichtrandes für den Grenzfall  $M_\infty \rightarrow 1$  aufgrund der geforderten Druckkontinuität gegen Null gehen muss, d.h. die äußere Strömung den Grenzschichtrand effektiv als eine annähernd ebene Wand „wahrnimmt“ und daher kaum mit der eigentlichen Wand interagiert. Die Ergebnisse der analytischen Studien wurden anschließend durch numerische Lösungen der RANS-Gleichungen verifiziert und bestätigen die Leithypothese der zweiten Betrachtungsebene. Hinsichtlich ihrer Übertragbarkeit auf realistische Konfigurationen hat sich gezeigt, dass aerodynamische Nichtlinearitäten bis zu Verformungsamplituden von 0,5 % der Schalenlänge vernachlässigt werden können und die strukturellen Einspannungen dem Energieaustausch tendenziell entgegenwirken.

Die dritte Betrachtungsebene (Kapitel 7) nimmt abschließend Bezug auf das eingangs eingeführte Beispiel der Saturn V und beleuchtet die globalen Stabilitätseigenschaften einer generischen Stufenverkleidung in einer supersonischen Strömung. Die zugrundeliegende Leithypothese stellt hierbei die Übertragbarkeit des dämpfenden Einflusses der Grenzschicht in den Fokus der Untersuchungen. Über kleine Anregungen ausgewählter Eigenschwingungsformen wurden zunächst aerodynamische Dämpfungskoeffizienten ermittelt und daraus Rückschlüsse auf die aeroelastische Stabilitätsgrenze abgeleitet. Charakteristisch ist hierbei, dass diese vom niedrigen zum hohen Überschallbereich hin abnimmt. Dabei ist das Einsetzen dynamischer Instabilitäten im Gegensatz zur ebenen Schale durch stromab wandernde Wellen gekennzeichnet, deren Wellenlänge kleiner als die Zylinderlänge ist. Diese Ergebnisse ließen sich anhand vergleichbarer Windkanalexperimente der NASA qualitativ validieren. Obwohl die Präsenz einer turbulenten Grenzschicht im stabilen Zustandsbereich mit einer geringfügigen Abnahme der aerodynamischen Dämpfung korreliert, wird das Einsetzen dynamischer Instabilitäten deutlich hinausgezögert. Dies belegt den dämpfenden Einfluss turbulenter Grenzschichten.

## 8.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit macht sich zweier Modellierungsansätze mit stark abweichenden Komplexitätsgraden zunutze: die sehr vereinfachte potentialtheoretische Beschreibung des linearisierten Strömungsfeldes auf der einen Seite, sowie die hochgenaue Modellierung nichtlinearer Strömungsphänomene über die RANS-Gleichungen auf der anderen Seite. Die Erkenntnis, dass die zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsverteilung im Bereich der Grenzschicht maßgeblich die aerodynamische Dämpfung beeinflusst, kann in die Entwicklung neuartiger Lösungsansätze einfließen, welche die jeweiligen Vorteile der beiden oben genannten Ansätze vereinen. So ließe sich zukünftig die Geschwindigkeitsverteilung des ungestörten Strömungszustandes aus Lösungen der RANS-Gleichung extrahieren und für eine verbesserte Formulierung der *shear-flow*-Theorie oder vergleichbarer Modelle heranziehen, um effizient komplexe Stördruckfelder für Panelflatteranalysen im Zeit- oder Frequenzbereich zu rekonstruieren.

Aus der Gegenüberstellung numerischer und experimenteller Ergebnisse im Rahmen der Verfahrensvalidierung leitet sich zudem die Detailfrage ab, inwieweit die Berücksichtigung akustischer Effekte in der rückseitigen Kavität zu einer verbesserten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment führt. Da der Fokus der vorliegenden Abhandlung auf dem Grenzschichteinfluss liegt, wurde dieser Aspekt außer Acht gelassen. Dass Interaktionseffekte zwischen der elastischen Struktur und dem Fluid in der Kavität jedoch einen nicht unerheblichen Einfluss auf die aeroelastischen Systemeigenschaften haben, ist aus der Literatur bekannt. Ein Nachweis, ob sich hierdurch die in Abschnitt 4.5.5 gezeigten Abweichungen zu den experimentellen Daten weiter reduzieren lassen, steht noch aus.

Abschließend ergeben sich aus der aeroelastischen Analyse kreiszylindrischer Schalen in der dritten Betrachtungsebene völlig neue Fragestellungen. So ist zum Beispiel zu hinterfragen, welcher Mechanismus die Anfachung der kurzwelligen stromab wandernden Biege- wellen verantwortet und ob die Präsenz geometrischer Nichtlinearitäten der Struktur die im Experiment beobachteten Biege- wellen in Umfangsrichtung initiiert. Die Berücksichtigung turbulenter Grenzschichten führt unterhalb der aeroelastischen Stabilitätsgrenze zudem zu einer unerwarteten Abnahme der aerodynamischen Dämpfung. Da die akustische Impedanz ein wichtiges Designkriterium von Nutzlastverkleidungen konventioneller Trägerraketen darstellt, ist ein Verständnis dieses Phänomens im Entwurfsprozess von hoher Bedeutung. Der stabilisierende Einfluss der Grenzschicht bezüglich der aeroelastischen Stabilitätsgrenze birgt zugleich das wirtschaftliche Potential, durch eine leichtere Bauweise Material- und Transportkosten einzusparen oder die Sicherheit etwaiger Entwürfe hinsichtlich aeroelastischer Instabilitäten besser bewerten zu können. Für eine quantitative Bestimmung der Stabilitätsgrenzen hat sich der in dieser Arbeit verwendete Lösungsansatz im Zeitbereich jedoch als numerisch zu aufwendig erwiesen, da die schwache Anfachung der dynamischen Instabilitäten sehr lange Lösungszeiten erfordert. Dennoch stellen die Ergebnisse eine gute Validierungsgrundlage für die Entwicklung aeroelastischer Ersatzmodelle dar und motivieren darüber hinaus, die aeroelastischen Eigenschaften von Kreiszylinderschalen vertiefend im Kontext der eingangs vorgestellten grundlagen- und anwendungsorientierten Problemstellungen zu studieren.

# Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H., ALTENBACH, J. und NAUMENKO, K.: *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer Vieweg, Berlin, 2. Auflage, 2016.
- [2] GARRICK, I. E. und REED, W. H.: *Historical Development of Aircraft Flutter*. Journal of Aircraft, 18(11):897–912, 1981.
- [3] LALL, T. R.: *Interstage Adapter Panel Flutter on Atlas-Centaur AC-2, AC-3, and AC-4 Vehicles*. NASA TM-X-1179, 1965.
- [4] NICHOLS, J. J.: *Saturn V, S-IVB Panel Flutter Qualification Test*. NASA TN-D-5439, 1969.
- [5] BOHON, H. L.: *Panel Flutter Tests on Full-Scale X-15 Lower Vertical Stabilizer at Mach Number of 3.0*. NASA TN-D-1385, 1962.
- [6] DOWELL, E. H.: *Panel flutter*. NASA Aeroelasticity Handbook, Volume 2: Design Guides, Seiten 19.1–19.23, 2006.
- [7] DOWELL, E. H.: *Panel Flutter: A Review of the Aeroelastic Stability of Plates and Shells*. AIAA Journal, 8(3):385–399, 1970.
- [8] NASA/MARSHALL SPACE FLIGHT CENTER: *Third Stage Fact Sheet*. Saturn V News Reference, 1968.
- [9] MUHLSTEIN, L., GASPERS, P. A. und RIDDLE, D. W.: *An Experimental Study of the Influence of the Turbulent Boundary Layer on Panel Flutter*. NASA TN-D-4486, 1968.
- [10] FUNG, Y. C.: *Some Recent Contributions to Panel Flutter Research*. AIAA Journal, 1(4):898–909, 1963.
- [11] DOWELL, E. H.: *Aerodynamic Boundary Layer Effects on Flutter and Damping of Plates*. Journal of Aircraft, 10(12):734–738, 1973.
- [12] ZEYDEL, E. F. E.: *Study of the Pressure Distribution on Oscillating Panels in Low Supersonic Flow with Turbulent Boundary Layer*. NASA CR-691, 1967.
- [13] DOWELL, E. H.: *Generalized Aerodynamic Forces on a Flexible Plate Undergoing Transient Motion in a Shear Flow with an Application to Panel Flutter*. AIAA Paper 70-76, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, USA, 1999.
- [14] FELIPPA, C. A., PARK, K. und FARHAT, C.: *Partitioned Analysis of Coupled Mechanical Systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(24-25):3247–3270, 2001.
- [15] HASHIMOTO, A., AOYAMA, T. und NAKAMURA, Y.: *Effects of Turbulent Boundary Layer on Panel Flutter*. AIAA Journal, 47(12):2785–2791, 2009.

- [16] XIE, D., XU, M., DAI, H. und DOWELL, E. H.: *Proper Orthogonal Decomposition Method for Analysis of Nonlinear Panel Flutter with Thermal Effects in Supersonic Flow*. Journal of Sound and Vibration, 337:263–283, 2015.
- [17] CARRERA, E., ZAPPINO, E. und FILIPPI, M.: *Free Vibration Analysis of Thin-Walled Cylinders Reinforced With Longitudinal and Transversal Stiffeners*. Journal of Vibration and Acoustics, 135(1):1–11, 2013.
- [18] DAUB, D., WILLEMS, S. und GÜLHAN, A.: *Experiments on the Interaction of a Fast-Moving Shock with an Elastic Panel*. AIAA Journal, 54(2):670–678, 2016.
- [19] VEDENEEV, V. V.: *Interaction of Panel Flutter with Inviscid Boundary Layer Instability in Supersonic Flow*. Journal of Fluid Mechanics, 736:216–249, 2013.
- [20] VEDENEEV, V. V. und BONDAREV, V.: *Influence of the boundary layer on flutter of elastic plate in supersonic gas flow*. European Association for Structural Dynamics (EASD), Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, Porto, Portugal, 2014.
- [21] TIJDEMAN, H.: *Investigation of the Transonic Flow around Oscillating Airfoils*. NLR TR 77090 U, 1977.
- [22] FÖRSCHING, H. W.: *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 1974.
- [23] SPALART, P. R. und ALLMARAS, S.: *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*. AIAA-Paper 92-0439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, USA, 1992.
- [24] CARRERA, E., ZAPPINO, E., PATOČKA, K., KOMAREK, M., FERRARESE, A., MONTABONE, M., KOTZIAS, B., HUERMANN, B. und SCHWANE, R.: *Aeroelastic Analysis of Versatile Thermal Insulation (VTI) Panels with Pinched Boundary Conditions*. CEAS Space Journal, 6(1):23–35, 2014.
- [25] PINSON, G. T.: *Apollo/Saturn 5 Postflight Trajectory: AS-512*. NASA D5-15560-12, 1973.
- [26] OLSON, M. D. und FUNG, Y. C.: *Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells Subjected to Internal Pressure and Axial Compression*. AIAA Journal, 4(5):858–864, 1966.
- [27] DOWELL, E. H.: *Aeroelasticity of Plates and Shells*. Noordhoff International Publishing, Leyden, Niederlande, 1975.
- [28] LIGHTHILL, M.: *Oscillating Airfoils at High Mach Number*. Journal of the Aeronautical Sciences, 20(6):402–406, 1953.
- [29] MAY, M.: *Linearized Flutter Investigations of Mistuned Turbomachinery Blading*. Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, 2012.
- [30] BRAESS, D.: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer Spektrum, Berlin, 5. Auflage, 2013.
- [31] MOK, D. P.: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2001.
- [32] FUNG, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 2016.



- [33] CHIA, C.-Y.: *Nonlinear Analysis of Plates*. McGraw-Hill International Book Co., New York, USA (u.a.), 1980.
- [34] FUNG, Y. C.: *Interaction of Mechanical and Aeroelastic Instabilities of a Circular Cylindrical Shell*. Dynamic Stability of Structures: Proceedings of an International Conference Held at Northwestern University, Seiten 267–284, 1967.
- [35] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 2. Auflage, 2002.
- [36] MACNEAL, R. H.: *A Simple Quadrilateral Shell Element*. Computers & Structures, 8(2):175–183, 1978.
- [37] CHUNG, J. und HULBERT, G. M.: *A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method*. Journal of Applied Mechanics, 60(2):371–375, 1993.
- [38] MSC SOFTWARE CORPORATION: *Nonlinear User's Guide (SOL 400)*. MSC Nastran 2014.1 Dokumentation, 2015.
- [39] HILBER, H. M., HUGHES, T. und TAYLOR, R. L.: *Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5(3):283–292, 1977.
- [40] NEWMARK, N. N.: *A Method of Computation for Structural Dynamics*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 85(3):67–94, 1959.
- [41] KLEIN, B.: *FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 10. Auflage, 2015.
- [42] ALGAZIN, S. D. und KIJKO, I. A.: *Aeroelastic Vibrations and Stability of Plates and Shells*. Studies in Mathematical Physics 25. Walter de Gruyter GmbH, Berlin u.a., 2015.
- [43] DOWELL, E. H.: *Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate*. AIAA Journal, 4(7):1267–1275, 1966.
- [44] VENTRES, C. S.: *Nonlinear Flutter of Clamped Plates*. Dissertation, Princeton University, Princeton, USA, 1969.
- [45] HINDMARSH, A. C.: *LSODE and LSODI, two new initial value ordinary differential equation solvers*. ACM SIGNUM Newsletter, 15(4):10–11, 1980.
- [46] HINDMARSH, A. C.: *ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers*. IMACS Transactions on Scientific Computing, 1:55–64, 1982.
- [47] RADHAKRISHNAN, K. und HINDMARSH, A. C.: *Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*. NASA RP-1327, 1993.
- [48] REYNOLDS, O.: *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 186:123–164, 1895.
- [49] SCHLICHTING, H. und GERSTEN, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 10. Auflage, 2006.

- [50] GERHOLD, T., GALLE, M., FRIEDRICH, O. und EVANS, J.: *Calculation of Complex Three-Dimensional Configurations Employing the DLR-Tau-Code*. AIAA Paper 97-0167, 35th AIAA, Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, USA, 1997.
- [51] BISPLINGHOFF, R. L., ASHLEY, H. und HALFMAN, R. L.: *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1955.
- [52] CUNNINGHAM, H. J.: *Flutter Analysis of Flat Rectangular Panels Based on Three-Dimensional Supersonic Unsteady Potential Flow*. NASA TR-R-256, 1967.
- [53] DOWELL, E. H.: *Generalized Aerodynamic Forces on a Flexible Plate Undergoing Transient Motion*. Quarterly of Applied Mathematics, 24(4):331–338, 1967.
- [54] BULIRSCH, R. und STOER, J.: *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin u.a., 9. Auflage, 2005.
- [55] HOLT, A. und GARABED, Z.: *Piston Theory - A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician*. Journal of the Aeronautical Sciences, 23(12):1109–1118, 1956.
- [56] DLR: *Technical Documentation of the DLR TAU-Code Release 2016.1.0*. DLR Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Braunschweig und Göttingen, 2016.
- [57] GERHOLD, T.: *Overview of the Hybrid RANS Code TAU*. Kroll N. und Fassbender J.K. (Hrsg.): MEGAFLOW - Numerical Flow Simulation for Aircraft Design. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (NNFM), 89:81–92, 2005.
- [58] WEINMAN, K.: *Turbulence Model Implementation in TAU*. Kroll N. und Fassbender J.K. (Hrsg.): MEGAFLOW - Numerical Flow Simulation for Aircraft Design. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (NNFM), 89:117–123, 2005.
- [59] SCHWAMBORN, D., GERHOLD, T. und HEINRICH, R.: *The DLR TAU-Code: Recent Applications in Research and Industry*. European Conference on Computational Fluid Dynamics, Delft, Niederlande, 2006.
- [60] JAMESON, A.: *Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics, 1: Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence*. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 4(3):171–218, 1995.
- [61] JAMESON, A. und TURKEL, E.: *Implicit Schemes and LU Decompositions*. Mathematics of Computation, 37(156):385–397, 1981.
- [62] THOMAS, P. D. und LOMBARD, C. K.: *Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids*. AIAA Journal, 17(10):1030–1037, 1979.
- [63] LESOINNE, M. und FARHAT, C.: *Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 134(1-2):71–90, 1996.
- [64] JAMESON, A.: *Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings*. AIAA Paper 1991-1596, 10th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, USA, 1991.

- [65] DWIGHT, R. P.: *Efficiency Improvements of RANS-Based Analysis and Optimization using Implicit and Adjoint Methods on Unstructured Grids*. Dissertation, University of Manchester, Manchester, England, 2006.
- [66] JAMESON, A., SCHMIDT, W. und TURKEL, E.: *Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge Kutta Time Stepping Schemes*. 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Palo Alto, USA, 1981.
- [67] GALLE, M.: *Ein Verfahren zur numerischen Simulation kompressibler, reibungs-behafteter Strömungen auf hybriden Netzen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1999.
- [68] GORDNIER, R. und VISBAL, M.: *Computation of three-dimensional nonlinear panel flutter*. AIAA Paper 2001-0571, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, USA, 2001.
- [69] HEINRICH, R.: *Development and Application of TAU-ANSYS Coupling Procedure*. Kroll N., Schwamborn D., Becker K., Rieger H. und Thiele F. (Hrsg.): MEGADE-SIGN and MegaOpt - German Initiatives for Aerodynamic Simulation and Optimization in Aircraft Design. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 107:151–167, 2009.
- [70] SPIERING, F., HEINRICH, R. und KEYE, S.: *Development of a Parallel Fluid-Structure Coupling Environment and Application to a Wind Tunnel Model under High Aerodynamic Loads*. Dillmann A., Heller G., Kreplin H. P., Nitsche W. und Peltzer I. (Hrsg.): New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VIII. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 121:507–514, 2013.
- [71] BECKERT, A. und WENDLAND, H.: *Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions*. Aerospace Science and Technology, 5(2):125–134, 2001.
- [72] BUHMANN, M. D.: *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Band 12 der Reihe *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, England (u.a.), 2003.
- [73] WENDLAND, H.: *Scattered Data Approximation*, Band 17 der Reihe *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, England (u.a.), 2010.
- [74] NEUMANN, J.: *Identifikation radialer Basisfunktionen zur räumlichen Strömungs-Struktur-Kopplung unter Berücksichtigung des Interpolations- und des Lasttransformationsfehlers*. DLR IB 232-2008, DLR Institut für Aeroelastik, Göttingen, 2008.
- [75] SARRA, S. A.: *Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations*. Applied Numerical Mathematics, 54(1):79–94, 2005.
- [76] FORNBERG, B., DRISCOLL, T. A., WRIGHT, G. und CHARLES, R.: *Observations on the behavior of radial basis function approximations near boundaries*. Computers & Mathematics with Applications, 43(3-5):473–490, 2002.
- [77] BOER, A. DE: *Computational fluid-structure interaction*. Dissertation, Technische Universiteit Delft, Delft, Niederlande, 2008.

- [78] RENDALL, T. C. S. und ALLEN, C. B.: *Unified fluid-structure interpolation and mesh motion using radial basis functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 74(10):1519–1559, 2008.
- [79] MICHLER, A. K.: *Aircraft control surface deflection using RBF-based mesh deformation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 88(10):986–1007, 2011.
- [80] HEINRICH, R.: *CFD Study on Model Deformation using a TAU-ANSYS Coupling Procedure*. EUROLIFT II Bericht D1.1.1-9, 2007.
- [81] GERHOLD, T.: *Efficient Algorithms for Mesh Deformation*. 7th ONERA-DLR Aerospace Symposium (ODAS), Toulouse, Frankreich, 2006.
- [82] ROACHE, P.: *Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies*. Journal of Fluids Engineering, 116(3):405–413, 1994.
- [83] RAKOWITZ, M.: *Grid Refinement Study with a UHCA Wing-Body Configuration Using Richardson Extrapolation and Grid Convergence Index GCI*. Wagner S., Rist U., Heinemann H.J. und Hilbig R. (Hrsg.): New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics III. Notes on Numerical Fluid Mechanics (NNFM), 77:297–303, 2002.
- [84] GORDNIER, R. E. und VISBAL, M. R.: *Development of a Three-Dimensional Viscous Aeroelastic Solver for Nonlinear Panel Flutter*. Journal of Fluids and Structures, 16(4):497–527, 2002.
- [85] SELVAM, R., VISBAL, M. und MORTON, S.: *Computation of nonlinear viscous panel flutter using a fully-implicit aeroelastic solver*. AIAA Paper 98-1844, 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Long Beach, USA, 1998.
- [86] ARNOLD, R. N. und WARBURTON, G. B.: *The Flexural Vibrations of Thin Cylinders*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 167(1):62–80, 1953.
- [87] OLSON, M. D.: *Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells*. Dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, USA, 1966.
- [88] TIMOSHENKO, S. und WOINOWSKY-KRIEGER, S.: *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Company, Inc., New York, USA, 2. Auflage, 1959.
- [89] DAVIS, G. A. und BENDIKSEN, O. O.: *Transonic Panel Flutter*. AIAA-Paper 93-1476, 34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, La Jolla, USA, 1993.
- [90] DOWELL, E. H.: *Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate. II*. AIAA Journal, 5(10):1856–1862, 1967.
- [91] DOWELL, E. H.: *Theoretical Panel Vibration and Flutter Studies relevant to Space Shuttle*. AIAA-Paper 72-350, 13th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, San Antonio, USA, 1972.
- [92] GIBBS, S. C., FICHERA, S., ZANOTTI, A., RICCI, S. und DOWELL, E. H.: *Flow field around the flapping flag*. Journal of Fluids and Structures, 48:507–513, 2014.

- [93] VEDENEV, V. V., SHISHAEVA, A., KUZNETSOV, K. und AKSENOV, A.: *Nonlinear Multi-Modal Panel Flutter Oscillations at Low Supersonic Speeds*. FEDSM2014-21659, ASME 2014 4th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting, Chicago, USA, 2014.
- [94] DOWELL, E. H.: *Flutter of a Buckled Plate as an Example of Chaotic Motion of a Deterministic Autonomous System*. Journal of Sound and Vibration, 85(3):333–344, 1982.
- [95] HASHIMOTO, A., MEN'SHOV, I. und NAKAMURA, Y.: *Panel Flutter Analysis with a Fluid-Structure Coupled Scheme*. AIAA-Paper 2003-3721, 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Orlando, USA, 2003.
- [96] GASPERS, P. A., MUHLSTEIN, L. und PETROFF, D. N.: *Further Experimental Results on the Influence of the Turbulent Boundary Layer on Panel Flutter*. NASA TN-D-5798, 1970.
- [97] DOWELL, E. H. und BENDIKSEN, O.: *Panel Flutter*. Encyclopedia of Aerospace Engineering, 2010.
- [98] JOHNS, D. J.: *A Survey on Panel Flutter*. AGARD Advisory Report 1, 21st Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel, Neuilly sur Seine, Frankreich, 1965.
- [99] MEI, C., ABDEL-MOTAGALY, K. und CHEN, R.: *Review of Nonlinear Panel Flutter at Supersonic and Hypersonic Speeds*. Applied Mechanics Reviews, 52(10):321–332, 1999.
- [100] OSTOICH, C. M., BODONY, D. J. und GEUBELLE, P. H.: *Interaction of a Mach 2.25 turbulent boundary layer with a fluttering panel using direct numerical simulation*. Physics of Fluids, 25(11):1–27, 2013.
- [101] BOLOTIN, V. V., GRISHKO, A. A., KOUNADIS, A. N., GANTES, C. und ROBERTS, J. B.: *Influence of Initial Conditions on the Postcritical Behavior of a Nonlinear Aeroelastic System*. Nonlinear Dynamics, 15(1):63–81, 1998.
- [102] POURTAKDOUST, S. H. und FAZELZADEH, S. A.: *Chaotic Analysis of Nonlinear Viscoelastic Panel Flutter in Supersonic Flow*. Nonlinear Dynamics, 32(4):387–404, 2003.
- [103] CHENG, G., LEE, Y. Y. und MEI, C.: *Flow Angle, Temperature, and Aerodynamic Damping on Supersonic Panel Flutter Stability Boundary*. Journal of Aircraft, 40(2):248–255, 2003.
- [104] HALL, K. C., THOMAS, J. P. und DOWELL, E. H.: *Proper Orthogonal Decomposition Technique for Transonic Unsteady Aerodynamic Flows*. AIAA Journal, 38(10):1853–1862, 2000.
- [105] GUO, X. und MEI, C.: *Application of aeroelastic modes on nonlinear supersonic panel flutter at elevated temperatures*. Computers & Structures, 84(24–25):1619–1628, 2006.
- [106] DOWELL, E. H.: *Flutter of Infinitely Long Plates and Shells: Part I: Plate*. AIAA Journal, 4(8):1370–1377, 1966.
- [107] PERKINS, T. M.: *Flutter Test of an Array of Full-Scale Panels from the Saturn S-IVB Stage at Transonic Mach Numbers*. AEDC TR-68-30, 1968.

- [108] ALDER, M.: *Development and Validation of a Fluid–Structure Solver for Transonic Panel Flutter*. AIAA Journal, 53(12):3509–3521, 2015.
- [109] SHISHAEVA, A., VEDENEEV, V. V. und AKSENOV, A.: *Nonlinear Single-Mode and Multi-Mode Panel Flutter Oscillations at Low Supersonic Speeds*. Journal of Fluids and Structures, 56:205–223, 2015.
- [110] XIE, D., XU, M., DAI, H. und DOWELL, E. H.: *Observation and evolution of chaos for a cantilever plate in supersonic flow*. Journal of Fluids and Structures, 50:271–291, 2014.
- [111] BRANDSTÄTER, A., SWIFT, J., SWINNEY, H. L., WOLF, A., FARMER, J. D., JEN, E. und CRUTCHFIELD, P. J.: *Low-Dimensional Chaos in a Hydrodynamic System*. Physical Review Letters, 51(16):1442–1445, 1983.
- [112] NICOLIS, C. und NICOLIS, G.: *Is there a climatic attractor?* Nature, 311:529–532, 1984.
- [113] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L. und VASTANO, J. A.: *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 16(3):285–317, 1985.
- [114] MILES, J. W.: *On Panel Flutter in the Presence of a Boundary Layer*. Space Technology Laboratories GM-TR-299, 1957.
- [115] MCCLURE, J. D.: *On Perturbed Boundary Layer Flows*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, 1962.
- [116] PRANDTL, L.: *Neue Ergebnisse der Turbulenzforschung*. VDI-Zeitschrift, 77:105–114, 1933.
- [117] INGER, G. R.: *Compressible Boundary Layer Flow Past a Swept Wavy Wall with Heat Transfer and Ablation*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics TN-67, 1970.
- [118] INGER, G. R. und WILLIAMS, E. P.: *Subsonic and Supersonic Boundary-Layer Flow past a Wavy Wall*. AIAA Journal, 10(5):636–642, 1972.
- [119] STOCK, H. W.: *Das Druckstörungsfeld im Überschall längs einer schwach welligen Wand unter Berücksichtigung der Grenzschicht*. ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 57(8):471–476, 1977.
- [120] MILES, J. W.: *On the Aerodynamic Instability of Thin Panels*. Journal of the Aeronautical Sciences, 23(8):771–780, 1956.
- [121] SCHLICHTING, H. und TRUCKENBRODT, E. A.: *Aerodynamik des Flugzeuges: Grundlagen aus der Strömungstechnik Aerodynamik des Tragflügels (Teil I)*. Klassiker der Technik. Springer-Verlag, Berlin (u.a.), 3. Auflage, 2001.
- [122] WIEGHARDT, K.: *Theoretische Strömungslehre*, Band 2. Universitätsverlag Göttingen, Göttingen, 2005.
- [123] ACKERET, J.: *Über Luftkräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten insbesondere bei ebenen Strömungen*. Helvetica Physica Acta, 1, 1928.

- [124] LÜBKER, J., ALDER, M. und FINK, H.: *Experimental Investigations on Dynamic Aeroelastic Stability of Panels in the Transonic Domain*. AIAA Paper 2017-1129, 58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Grapevine, USA, 2017.
- [125] STEARMAN, R. O., LOCK, M. H. und FUNG, Y. C.: *Ames tests on the Flutter of Cylindrical Shells*. Graduate Aeronautical Laboratories, California Institute of Technology, Pasadena, USA, 1962.
- [126] OLSON, M. D. und FUNG, Y. C.: *Comparing Theory and Experiment for the Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells*. AIAA Journal, 5(10):1849–1856, 1967.
- [127] EVENSEN, D. A.: *Nonlinear Flexural Vibrations of Thin-Walled Circular Cylinders*. NASA TR-R-227, 1965.
- [128] STEARMAN, R. O.: *An Experimental Study on the Aeroelastic Stability of Thin Cylindrical Shells at the Lower Supersonic Mach Numbers*. Midwest Research Institute, AFOSR 66-2828, 1966.
- [129] HORN, W., BARR, G., CARTER, L. und STEARMAN, A. N.: *Recent Contributions to Experiments on Cylindrical Shell Panel Flutter*. AIAA Journal, 12(11):1481–1490, 1974.
- [130] ANDERSON, W. J.: *Oscillatory Pressures in an Idealized Boundary Layer with Application to Cylinder Flutter*. AIAA Journal, 4(5):865–872, 1966.
- [131] DONNELL, L. H.: *Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion*. NACA TR-479, 1953.
- [132] OLSON, M. D.: *Finite Elements Applied to Panel Flutter*. AIAA Journal, 5(12):2267–2270, 1967.
- [133] AMABILI, M. und PELLICANO, F.: *Nonlinear Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells*. AIAA Journal, 39(4):564–573, 2001.
- [134] SABRI, F. und LAKIS, A. A.: *Finite Element Method Applied to Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells*. AIAA Journal, 48(1):73–81, 2010.
- [135] MENTER, F. R.: *Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications*. AIAA Journal, 32(8):1598–1605, 1994.
- [136] WILCOX, D. C.: *Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models*. AIAA Journal, 26(11):1299–1310, 1988.
- [137] MICHELASSI, V. und SHIH, T. H.: *Elliptic Flow Computation by Low Reynolds Number Two-Equation Turbulence Models*. NASA TM-105376, 1991.
- [138] WILCOX, D. C.: *Comparison of Two-Equation Turbulence Models for Boundary Layers with Pressure Gradient*. AIAA Journal, 31(8):1414–1421, 1993.





# A Koeffizienten der Modellgleichungen

## A.1 Koeffizienten der strukturdynamischen Modellgleichungen

$$C_1 = \sum_r \frac{r^2 + \nu(L/B)^2}{1 - \nu^2} q_s^2 \quad (\text{A.1})$$

$$C_2 = \sum_r \frac{(L/B)^2 + \nu r^2}{1 - \nu^2} q_s^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} C_3 = & \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m m^2 [\gamma_{(n+r)(m-s)} - \gamma_{(n+r)(m+s)}] \frac{r(n-r)}{[(n+r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \\ & + \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m m^2 [\gamma_{(n-r)(m-s)} - \gamma_{(n-r)(m+s)}] \frac{r(n+r)}{[(n-r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 = & \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m m^2 [\beta_{(n+r)(m+s)} - \beta_{(n+r)(s-m)}] \frac{r(n-r)(n+r)}{[(n+r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \\ & + \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m m^2 [\beta_{(n-r)(m+s)} - \beta_{(n-r)(s-m)}] \frac{r(n+r)(n-r)}{[(n-r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 = & \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m m^2 [\gamma_{(n+r)(m-s)} - \gamma_{(n+r)(m+s)}] \frac{r(n-r)(n+r)^2}{[(n+r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \\ & + \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m m^2 [\gamma_{(n-r)(m-s)} - \gamma_{(n-r)(m+s)}] \frac{r(n+r)(n-r)^2}{[(n-r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_6 = & \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m [\gamma_{(n+r)(m-s)} - \gamma_{(n+r)(m+s)}] \frac{r}{n+r} \\ & + \sum_r \sum_n \sum_m q_r q_n q_m [\gamma_{(n-r)(m-s)} - \gamma_{(n-r)(m+s)}] \frac{r(n+r)(n-r)^2}{[(n-r)^2 + 4(L/B)^2]^2} \epsilon_{rn} \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

$$\beta_{(i)(j)} = \begin{cases} 1 & i = j \neq 0 \\ -1 & i = -j \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_{(i)(j)} = \begin{cases} 2 & i = j = 0 \\ 1 & i = j \neq 0 \\ 1 & i = -j \neq 0 \\ 0 & i \neq j, i \neq -j \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$\epsilon_{(r)(n)} = \begin{cases} \frac{r}{n-r} & r \neq n \\ 0 & r = n \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

## A.2 Koeffizienten der aerodynamischen Modellgleichungen

Für die Formulierung der in Gleichung (3.52) enthaltenen Konstanten bieten sich die normierten Koordinaten  $\xi = x/L$  und  $\eta = y/B$  an. Zudem ist die zweidimensionale Eigenschwingungsform  $\psi_s(\xi, \eta)$  in ihre eindimensionalen Komponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung aufzuspalten, d.h.  $\psi_s(\xi, \eta) = \psi_{s_x}(\xi)\psi_{s_y}(\eta)$ .

$$S_{rs} = \frac{1}{M_\infty} \int_0^1 \frac{d\psi_{r_x}}{d\xi} \psi_{s_x} d\xi \int_0^1 \psi_{r_y} \psi_{s_y} d\eta \quad (\text{A.10})$$

$$D_{rs} = \frac{1}{M_\infty} \int_0^1 \psi_{r_x} \psi_{s_x} d\xi \int_0^1 \psi_{r_y} \psi_{s_y} d\eta \quad (\text{A.11})$$

$$H_{rs} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{M_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{rs} i\alpha^* \sqrt{\alpha^{*2} + \gamma^{*2}(L/B)^2} e^{-i\alpha^* \tau} J_1 \cdot \left( \frac{\tau}{M_\infty} \sqrt{\alpha^{*2} + \gamma^{*2}(L/B)^2} \right) d\alpha^* d\gamma^* \quad (\text{A.12})$$

$$I_{rs} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{M_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{rs} \sqrt{\alpha^{*2} + \gamma^{*2}(L/B)^2} e^{-i\alpha^* \tau} J_1 \cdot \left( \frac{\tau}{M_\infty} \sqrt{\alpha^{*2} + \gamma^{*2}(L/B)^2} \right) d\alpha^* d\gamma^* \quad (\text{A.13})$$

$$G_{rs} = \int_0^1 \psi_{r_x} e^{-i\alpha^* \xi} d\xi \int_0^1 \psi_{s_x} e^{i\alpha^* \xi} d\xi \int_0^1 \psi_{r_y} e^{-i\gamma^* \eta} d\eta \int_0^1 \psi_{s_y} e^{i\gamma^* \eta} d\eta \quad (\text{A.14})$$

Hierin sind  $\alpha^* = \alpha L$  und  $\gamma^* = \gamma L$  dimensionslose Fourier-Konstanten und  $\tau$  die dimensionslose Zeit nach Gleichung (2.24).

## B Schließungsansätze der Reynolds-Gleichungen

### Reynolds-Gleichungen in Integralform

Nach Anwendung der Reynolds- und Favre-Mittelung (vgl. Gleichungen (3.36) und (3.38)) auf das Gleichungssystem (3.25) ergeben sich die Reynolds-Gleichungen, im Folgenden in der schwachen Formulierung mit konservativen Variablen, zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}} \, d\Omega = - \iint_{\Gamma} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{B.1})$$

mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Berandung  $\Gamma = \partial\Omega$  des Kontrollvolumens  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sowie den gemittelten Erhaltungsgrößen  $\tilde{\mathbf{w}}$ :

$$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \\ \bar{\rho} \tilde{E} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Der Flussdichtetensor  $\tilde{\mathbf{F}}$  ergibt sich als Summe der dyadischen Produkte der gemittelten Flussdichtevektoren  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  mit den dazugehörigen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_k$  des kartesischen Koordinatensystems, die jeweils in einen konvektiven  $\tilde{\mathbf{F}}_k^{\text{konv}}$  und einen dissipativen Anteil  $\tilde{\mathbf{F}}_k^{\text{diss}}$  aufgespalten werden können:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \sum_k (\tilde{\mathbf{F}}_k^{\text{konv}} + \tilde{\mathbf{F}}_k^{\text{diss}}) \mathbf{e}_k. \quad (\text{B.3})$$

Die Komponenten der konvektiven und dissipativen Flussvektoren lauten hierbei:

$$\tilde{\mathbf{F}}_k^{\text{konv}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{v}_k \\ \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_k + \bar{p} \delta_{ik} \\ \bar{\rho} \tilde{H} \tilde{u}_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_k^{\text{diss}} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{ik} - \bar{\rho} \overline{v_i'' v_k''} \\ \sum_i \tilde{v}_i \tilde{\tau}_{ik} + \sum_i \overline{v_i'' \tau_{ik}} + \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{\rho H'' v_k''}}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

mit der Totalenthalpie  $\tilde{H}(\mathbf{x}, t)$

$$\tilde{H} = \tilde{E} + \frac{\bar{p}}{\rho}. \quad (\text{B.5})$$

### Spalart-Allmaras Turbulenzmodell

Die turbulente Viskosität  $\mu_t$  wird nach Spalart und Allmaras über eine modifizierte kinematische Wirbelviskosität  $\nu_t^*$  beschrieben

$$\mu_t = \bar{\rho} \nu_t \quad \text{mit} \quad \nu_t = \nu^* f_{\nu 1} , \quad (\text{B.6})$$

die über eine zusätzliche Transportgleichung

$$\frac{\partial \nu_t^*}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \nu^* = c_{b1} S^* \nu^* - c_{w1} f_w \left( \frac{\nu^*}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla[(\nu + \nu^*) \nabla \nu^*] + c_{b2} (\nabla \nu^*)^2 \right\} \quad (\text{B.7})$$

mit

$$S^* = S + \frac{\nu^*}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad \text{mit} \quad S = |\boldsymbol{\omega}| \quad (\text{B.8})$$

bestimmt wird. Die Terme auf der rechten Seite der Differentialgleichung (B.7) beschreiben aus phänomenologischer Sicht in der dargestellten Reihenfolge die Produktion, Destruktion und Diffusion von  $\nu_t^*$ . Hierbei stellt  $d$  den kleinsten Wandabstand und  $\boldsymbol{\omega}$  die Wirbelstärke dar. Die drei Dämpfungsfunktionen

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad \text{und} \quad f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{B.9})$$

sind mit

$$\chi = \frac{\nu^*}{\nu_t}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad \text{mit} \quad r = \min \left( \frac{\nu^*}{\varepsilon^* \kappa^2 d^2}, 10 \right) \quad (\text{B.10})$$

definiert. Schließlich lauten die verbleibenden Schließungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \kappa &= 0,41, & c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, \\ c_{b1} &= 0,1355, & c_{w2} &= 0,3, \\ c_{b2} &= 0,622, & c_{w3} &= 2,0, \\ \sigma &= \frac{2}{3}, & c_{v1} &= 7,1. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

### Menter-SST $k$ - $\omega$ Turbulenzmodell

Die turbulente Viskosität  $\mu_t$  lässt sich über die Beziehung

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\epsilon}{k} \quad (\text{B.12})$$

ausdrücken, wobei  $k = \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{u}'' \mathbf{u}''}$  die turbulente kinetische Energie,  $\epsilon$  die turbulente Dissipation und  $\omega$  die spezifische turbulente Dissipationsrate darstellt. In dieser Arbeit wird ein von Menter [135] vorgeschlagenes Wirbelviskositätsmodell angewendet, welches den Ansatz verfolgt, die Vorteile eines  $k$ - $\omega$ -Modells nach Wilcox [136] und des Standard  $k$ - $\epsilon$ -Modells [137, 138] miteinander zu kombinieren. So kommt das  $k$ - $\omega$ -Modell für die Modellierung des laminaren und logarithmischen Teils der Grenzschicht zum Einsatz, da es im wandnahen Bereich ein numerisch stabileres Verhalten zeigt und im logarithmischen Bereich Vorteile bei negativen Druckgradienten und kompressiblen Strömungen und aufweist. Im Fernfeldbereich erweist sich das  $k$ - $\epsilon$ -Modell als vorteilhaft, da es weniger sensitiv

auf Randbedingungen im Fernfeld reagiert. Die Transportgleichungen lauten:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{v}k) = P - \beta_k \bar{\rho}\omega k + \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k] \quad (\text{B.13a})$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{v}\omega) = \frac{\gamma \bar{\rho}}{\mu_t} P - \beta_\omega \bar{\rho}\omega^2 + \nabla \cdot [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega] + 2(1 - F_1) \frac{\bar{\rho}\sigma_{\omega 2}}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega \quad (\text{B.13b})$$

wobei die Produktion turbulenter kinetischer Energie über den Term

$$P = \tau_t : \nabla \bar{v} \quad (\text{B.14})$$

beschrieben wird. Die Schließungskoeffizienten  $\Phi \in \{\sigma_k, \sigma_\omega, \gamma, \beta_k\}$  werden über eine Blendungsfunktion

$$\Phi = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2 \quad (\text{B.15})$$

für den inneren Grenzschichtbereich  $\Phi_1$  gemäß dem  $k$ - $\omega$ -Modell und den äußeren Bereich  $\Phi_2$  gemäß dem  $k$ - $\epsilon$ -Modell vorgegeben. Dabei ist entsprechend der obigen Indizierung:

$$\sigma_{k1} = 0,85 ; \quad \sigma_{\omega 1} = 0,5 ; \quad \gamma_1 = 0,555\,556 ; \quad \beta_{\omega 1} = \beta_k \left( \gamma_1 + \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta_k}} \right) \quad (\text{B.16})$$

und

$$\sigma_{k2} = 1,0 ; \quad \sigma_{\omega 2} = 0,875 ; \quad \gamma_2 = 0,44 ; \quad \beta_{\omega 2} = \beta_k \left( \gamma_2 + \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta_k}} \right) \quad (\text{B.17})$$

mit  $\kappa = 0,41$  und  $\beta_k = 0,09$ . Die Blendungsfunktion  $F_1$  ist definiert als

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad \text{mit} \quad \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta_k \omega d}, \frac{500\mu}{\rho \omega d^2} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{\text{CD}_{k\omega} d^2} \right]. \quad (\text{B.18})$$

Hierbei ist  $\text{CD}_{k\omega}$  ein Diffusionsterm zwischen  $k$  und  $\omega$ :

$$\text{CD}_{k\omega} = \max \left( 2\bar{\rho}\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-20} \right). \quad (\text{B.19})$$

Menter limitiert die turbulente Wirbelviskosität mit

$$\mu_t = \min \left( \frac{\bar{\rho}k}{\omega}; \frac{a_1 \bar{\rho}k}{SF_1} \right), \quad (\text{B.20})$$

um eine Überschätzung der Schubspannung zu verhindern. Basierend auf der Annahme, dass die Schubspannung  $\tau_t$  proportional zur turbulenten kinetischen Energie  $k$  ist:

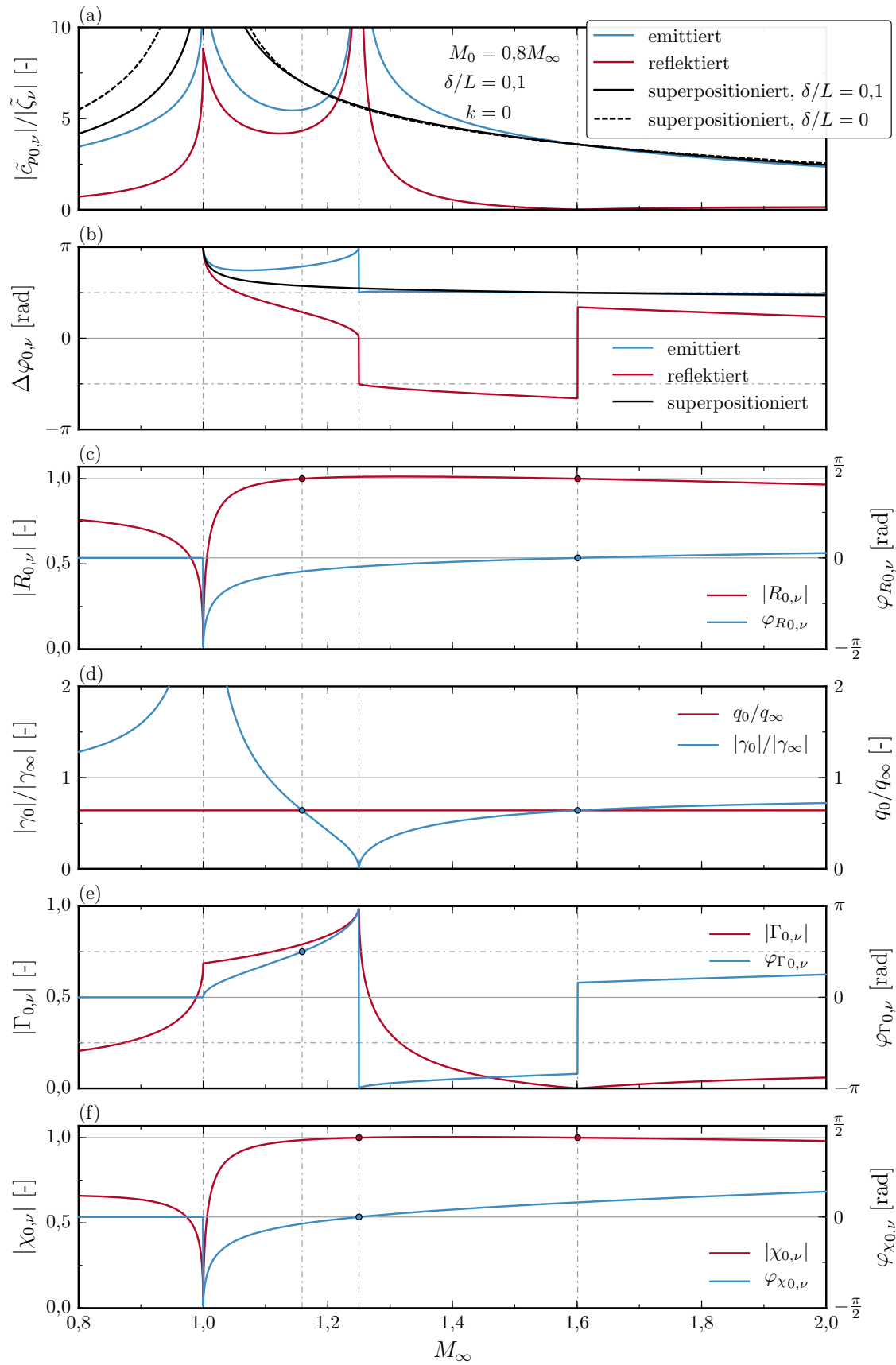
$$\tau_t = \rho a_1 k, \quad (\text{B.21})$$

ergibt sich aus experimentellen Untersuchungen die Bradshaw-Konstante  $a_1 = 0,31$ . Die Hilfsfunktion  $F_2$  sei

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad \text{mit} \quad \arg_2 = \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta_k \omega d}, \frac{500\mu}{\rho \omega d^2} \right). \quad (\text{B.22})$$

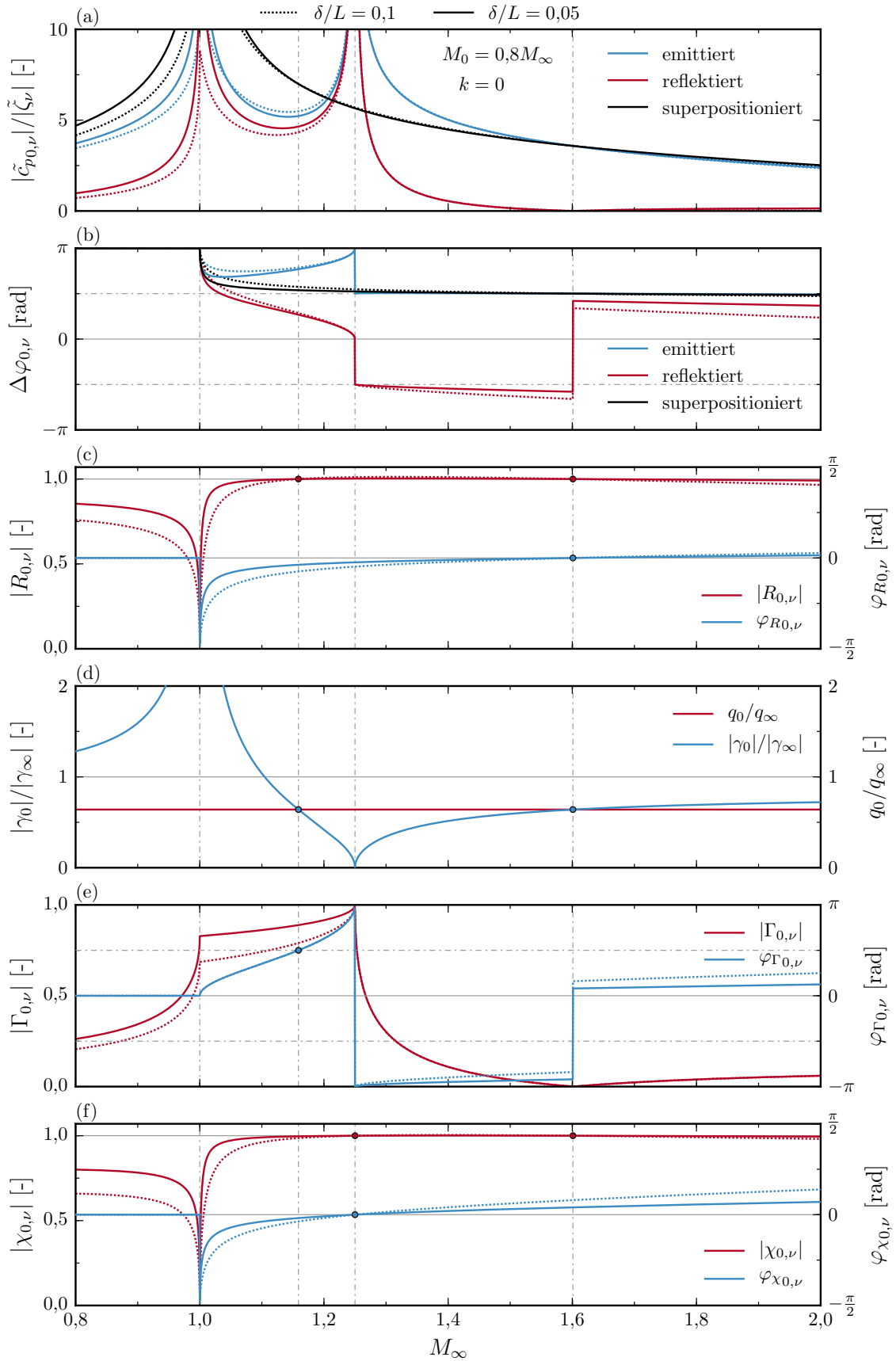


## C Gegenüberstellung der Grenzschichtparameter

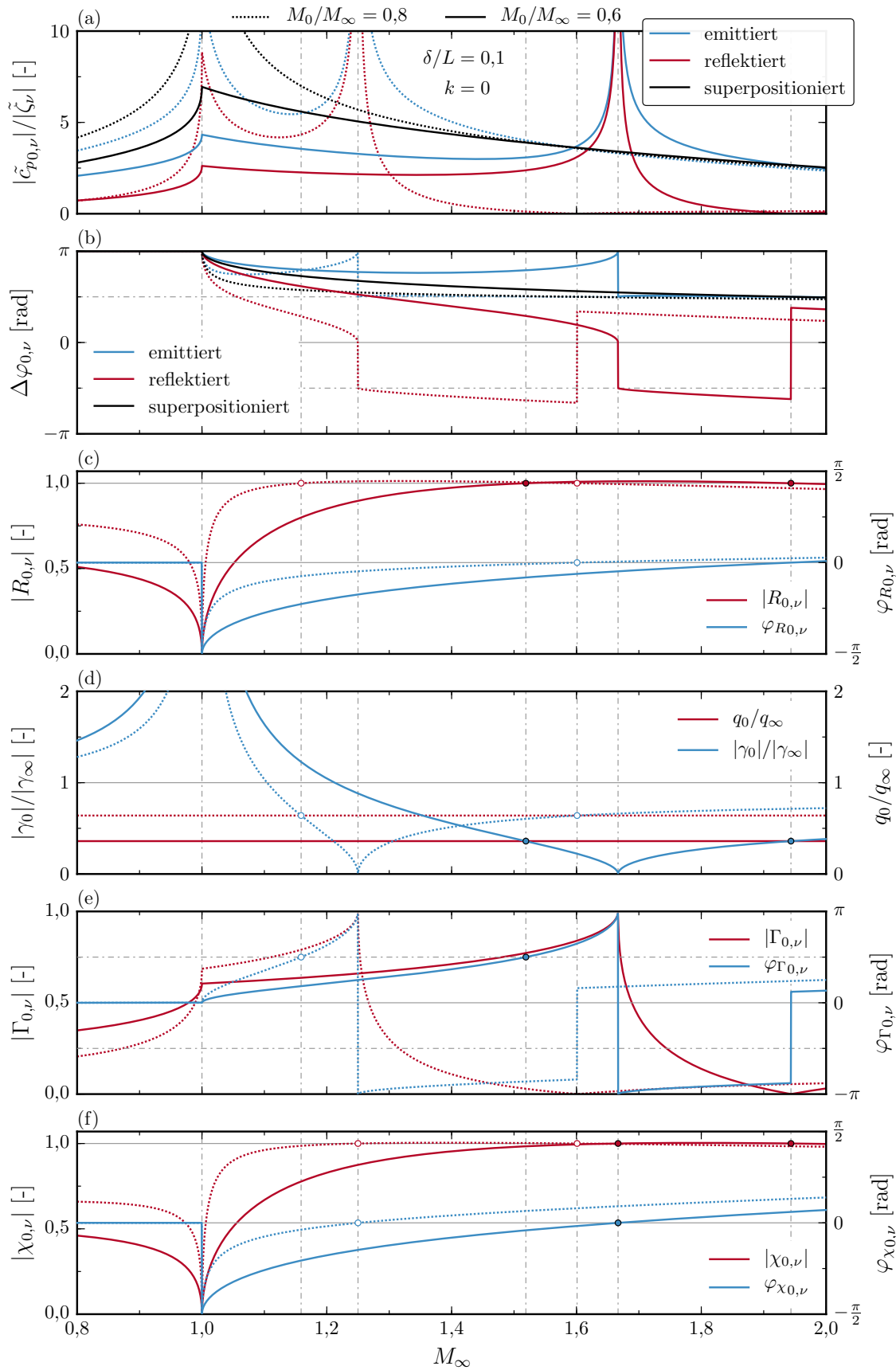


**Abbildung C.1:** Gegenüberstellung der relevanten Parameter zur Beschreibung des Grenzschichteinflusses für  $k=0$  und  $\delta/L=0.1$ .



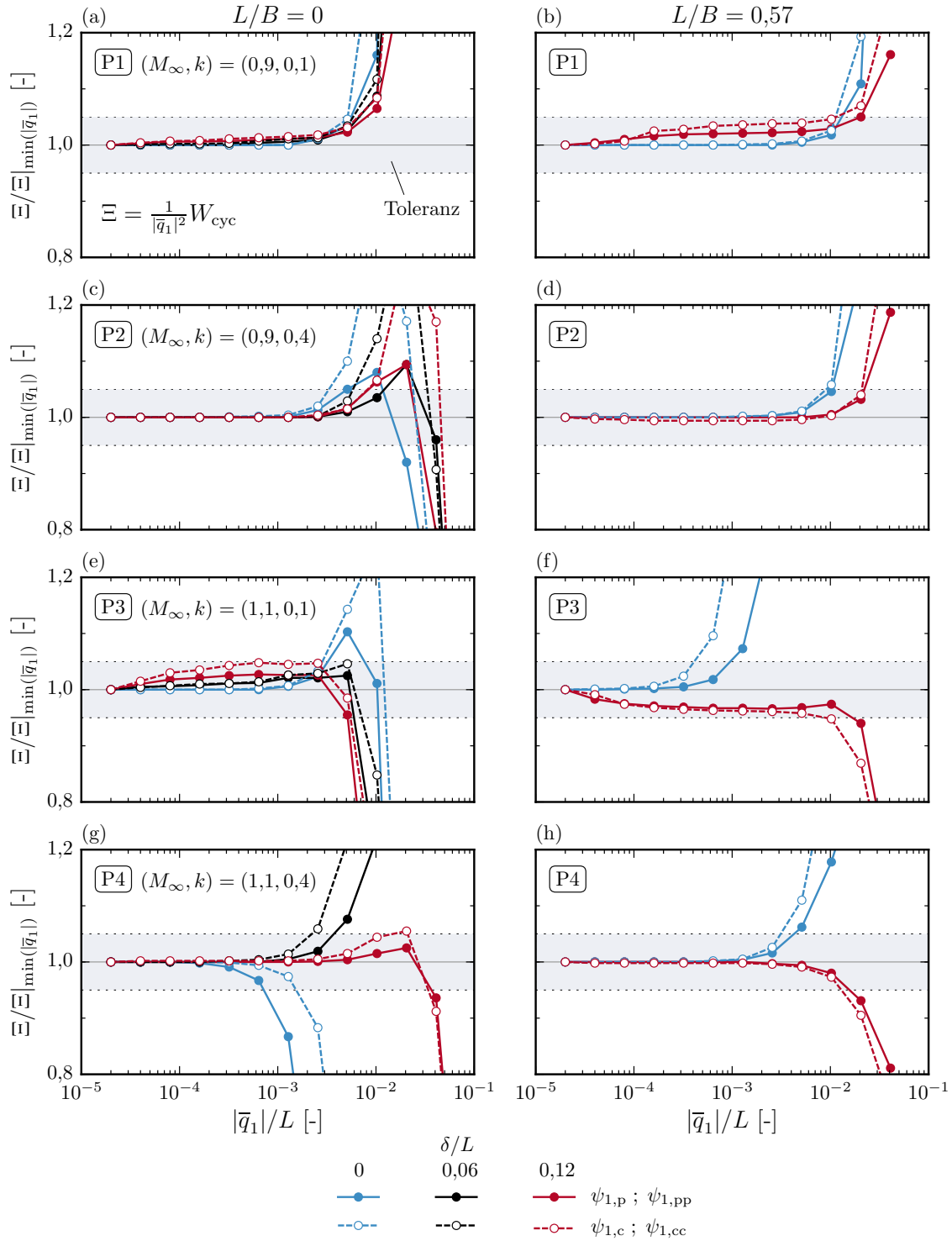


**Abbildung C.2:** Gegenüberstellung der relevanten Parameter zur Beschreibung des Grenzschichteinflusses für  $\delta/L = 0,05$  und  $\delta/L = 0,1$  bei  $k = 0$ .



**Abbildung C.3:** Gegenüberstellung der relevanten Parameter zur Beschreibung des Grenzschichteinflusses für  $M_0/M_\infty = 0,6$  und  $0,8$  bei  $k = 0$ .

## **D   Dynamisches Linearitätsverhalten ebener Schalen**



**Abbildung D.1:** Dynamisches Linearitätsverhalten der normierten Arbeit  $W_{\text{cyc}}$  für die ein- und zweidimensionalen Anregungsformen  $\psi_{1,p}$ ,  $\psi_{1,c}$  und  $\psi_{1,pp}$ ,  $\psi_{1,cc}$  in einer reibungsfreien (links) und reibungsbehafteten Strömung (rechts).